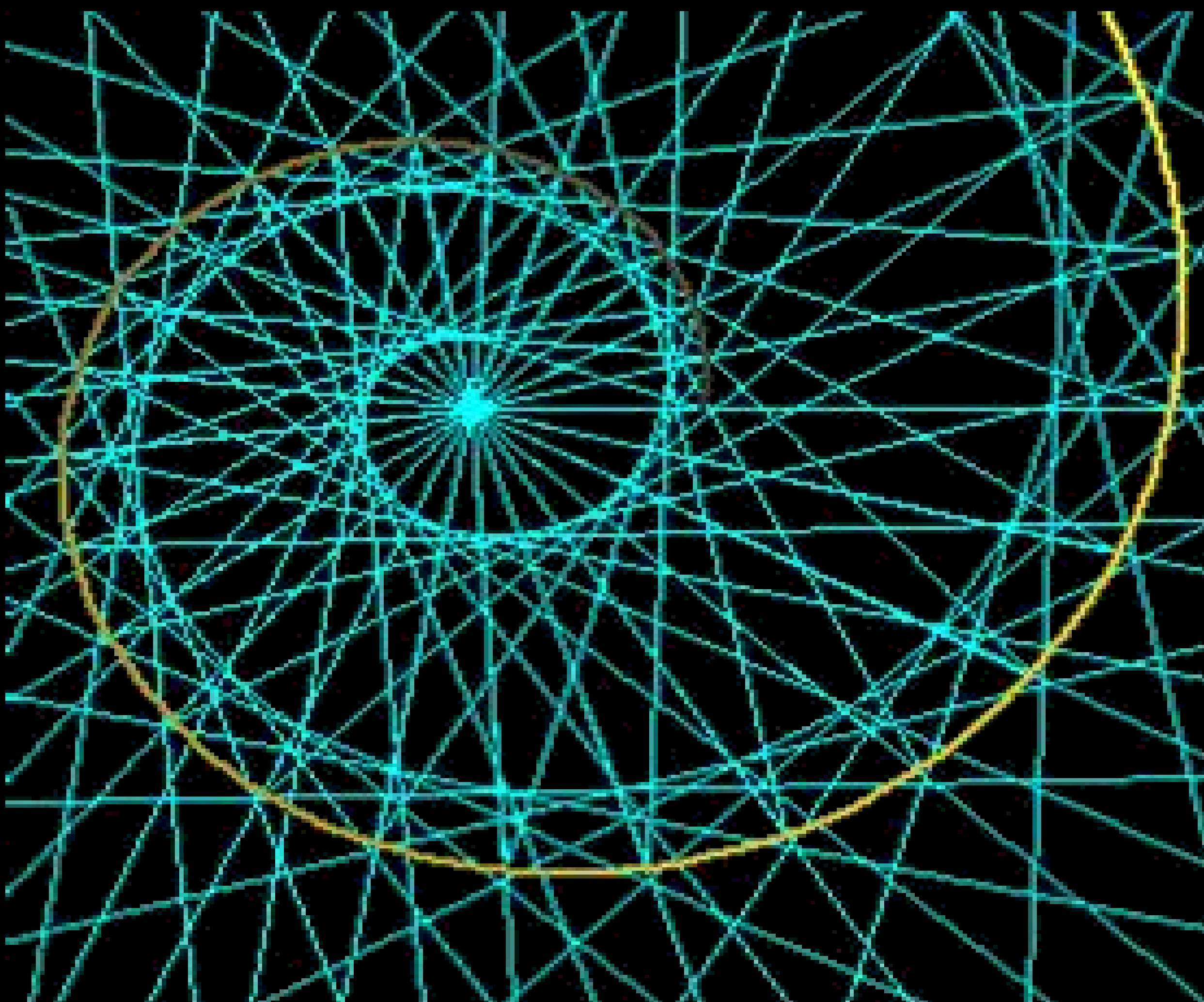
Fundamentos Matemáticos

para

Ingeniería y Ciencias



Alfaomega

Fundamentos Matemáticos

Para Ingeniería y Ciencias

Eduardo Ariza Velázquez • Nelva Betzabel Espinoza Hernández
Pedro García Juárez • Rosa García Tamayo
Diego Herrera Cobián • Carlos Palomino Jiménez
Héctor David Ramírez Hernández • Carlos Zamora Lima

Gerente editorial
Marcelo Grillo Giannetto
mgrillo@alfaomega.com.mx

Editor
Francisco Javier Rodríguez Cruz
jrodriguez@alfaomega.com.mx

Datos catalográficos
Ariza Velázquez, Eduardo; et. al.
Fundamentos Matemáticos
para Ingeniería y Ciencias

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN 978-607-707-864-7

Fundamentos Matemáticos para Ingeniería y Ciencias
Eduardo Ariza Velázquez; Nelva Betzabel Espinoza Hernández; Pedro García Juárez; Rosa García Tamayo; Diego Herrera Cobián; Carlos Palomino Jiménez; Héctor David Ramírez Hernández; Carlos Zamora Lima

Alfaomega Grupo Editor, México, agosto de 2013

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 2317

Pág. Web: **http://www.alfaomega.com.mx**
E-mail: **atencionalcliente@alfaomega.com.mx**

ISBN: 978-607-707-864-7

Empresas del grupo:
México: Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. C.P. 03100.
Tel.: (52-55) 5575-5022 - Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396
E-mail: atencionalcliente@alfaomega.com.mx

Colombia: Alfaomega Colombia S.A. - Carrera 15 No. 64 A 29, Bogotá, Colombia.
Tel.: (52-1) 2100122 - Fax: (57-1) 6068648. E-mail: cliente@alfaomgea.com.co

Chile: Alfaomega Grupo Editor, S.A. - Dr. La Sierra 1437, Providencia, Santiago, Chile
Tel.: (56-2) 235-4248 - Fax: (56-2) 235-5786. E-mail: agechile@alfaomgea.cl

Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. - Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1087, Buenos Aires, Argentina.
Tel./Fax: (54-11) 4811-8352, 4811 7183 y 4811 0887. E-mail: ventas@alfaomegaeditor.com.ar.

Introducción

Entre las ramas de la matemática más empleadas en la ciencia están el análisis matemático, el cálculo numérico y la estadística, aunque en la actualidad prácticamente toda rama de la matemática tiene aplicaciones en la ciencia y toda área del conocimiento requiere de una buena base matemática. Esta es la razón por la que requerimos de establecer los fundamentos matemáticos necesarios para poder hacer uso de las herramientas matemáticas.

Por otro lado, en los últimos años la lógica ha adquirido relevancia en las ciencias de la computación, debido a sus múltiples aplicaciones. Además, la lógica y la matemática son esenciales para todas las ciencias por la capacidad de poder inferir con seguridad unas verdades a partir de otras establecidas; es lo que las hace recibir la denominación de “Ciencias exactas”. Estas son las razones por las que incluimos el capítulo 1 sobre el lenguaje y deducción matemática.

Los capítulos 2, 3 y 4 están dedicados para hablar, en buena medida, de los conceptos considerados como fundamentales en la matemática: conjunto, número real y función, que aparecen en cualquier rama de la matemática. Abordaremos los temas de manera más formal de lo que usualmente se hace (comparado con estudios preuniversitarios), con báses lógicas.

Aunque el objetivo inicial es cubrir los temas correspondientes a la materia “Matemáticas elementales” de la Facultad de Ciencias de la Computación en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, la presente obra es también apropiada para todos aquellos estudiantes de Ingeniería y Ciencias en general que necesiten aprender las herramientas matemáticas de nivel superior.

Finalmente la autoría específica de los capítulos es la siguiente:

- **Capítulo 1**. Eduardo Ariza Velázquez, Pedro García Juárez, Rosa García Tamayo, Diego Herrera Cobián.
- **Capítulo 2**. Eduardo Ariza Velázquez, Nelva Betzabel Espinoza Hernández , Pedro García Juárez, Rosa García Tamayo, Diego Herrera Cobián.
- **Capítulo 3**. Eduardo Ariza Velázquez, Nelva Betzabel Espinoza Hernández, Carlos Palomino Jiménez, Héctor David Ramírez Hernández, Carlos Zamora Lima.
- **Capítulo 4**. Eduardo Ariza Velázquez, Carlos Palomino Jiménez, Héctor David Ramírez Hernández, Carlos Zamora Lima.

Índice general

Capítulo 1

Lenguaje y deducción matemática

El objetivo de este capítulo es asimilar el razonamiento matemático y sus métodos. Para ello requerimos de un lenguaje con precisión y claridad, que no se preste a distintas interpretaciones.

1.1. Proposiciones lógicas

Una proposición es la expresión de un juicio, esto es, de una relación entre dos (o más) términos, sujeto-predicado, que afirma o niega, incluye o excluye el primero respecto del segundo.

Definición 1.1.1 *Una proposición lógica es un enunciado de tipo declarativo que únicamente acepta un valor de verdad, de dos posibles: Falso, o bien, Verdadero.*

Ejemplos 1

1. **En la ciudad de Puebla hay mar**. *Esta es una proposición lógica (falsa).*

2. **En el laboratorio de cómputo no hay nadie**. *No es una proposición lógica, pues en el sentido estricto del lenguaje matemático se presta a dos interpretaciones (con valores de verdad distintos).*

3. **2+2** *No es una proposición lógica, debido a que no es posible asignarle un valor de verdad.*

4. **2+2 = 4** *Esta frase sí es una proposición lógica (es verdadera).*

Nos ocuparemos únicamente de las proposiciones lógicas, a las que haremos referencia simplemente como proposiciones, sin peligro de confusión.

Usaremos los símbolos P, p, Q, q, R, $r\ldots$, para representar proposiciones pues, sin importar su mensaje, contenido o extensión, inicialmente nos interesa saber que sólo tienen un valor de verdad. Reservamos las letras mayúsculas “V” y “F” para hacer referencia a los valores Verdadero y Falso respectivamente.

1.2. Conectivos lógicos

Reconocemos dos tipos de proposiciones lógicas: el primero corresponde a las proposiciones básicas llamadas simples (o atómicas) y el segundo corresponde a las proposiciones compuestas (o moleculares).

Definición 1.2.1

1. *Una proposición simple o atómica es aquella en la cual no es posible distinguir partes que, a su vez, sean proposiciones.*

2. *Las proposiciones compuestas, o moleculares, se construyen a partir de proposiciones simples. En una proposición compuesta sí es posible distinguir partes que a su vez son proposiciones, además de otros objetos que las relacionan.*

Sin que sea una ley, usaremos los símbolos p, q, $r\dots$ para hacer referencia a proposiciones simples, así como los símbolos P, Q, $R\dots$ para las compuestas.

El procedimiento para obtener proposiciones compuestas es mediante los conectivos lógicos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, negación, disyunción, conjunción, implicación y bicondicional, respectivamente. Los conectivos permiten construir nuevas proposiciones lógicas a partir de una o más proposiciones simples (o compuestas). Los conectivos surgen de nuestro lenguaje cotidiano, salvo que en la Matemática (y las ciencias en general) se requiere de una interpretación estricta.

1.2.1. Negación

La proposición $\neg P$ es la negación de la proposición P y se lee como *"no: P"*. Ésta se obtiene al anteponer el conectivo " $\neg$ " a la proposición P. Otras formas para simbolizar la negación de la proposición P son: $-P$, $\sim P$, $\tilde{P}$ que, por razones posteriores, evitaremos. Nos limitaremos en identificar la negación de P con $\neg P$.

Verbalmente la negación de una proposición no se sujeta a una regla sino a la capacidad expresiva de quien lo hace.

Ejemplo 1 *Sea p la proposición "Mañana estará soleado" (Asumiendo un lugar específico). Algunas formas para expresar verbalmente $\neg p$ pueden ser:*

No es cierto que: el día de mañana estará soleado.

El día de mañana no estará soleado.

Es falso que: el día de mañana estará soleado.

No se da que: el día de mañana estará soleado.

El día de mañana estará nublado.

Para símbolos propios de la Matemática, puede evitarse la expresión verbal.

Ejemplos 2

1. *Si $q : 3a + b = 5$, podemos escribir $\neg q$ como:*

   $3a + b$ *no es igual a* 5 *ó*
   $3a + b$ *es diferente de* 5 *ó*
   $3a + b \neq 5$.

2. *Si r es la proposición $2d + 3a > 7$, la proposición $\neg r$ puede escribirse como:*

   $2d + 3a$ *no es mayor que* 7 *ó*
   $2d + 3a \not> 7$ *ó*
   $2d + 3a$ *es menor o igual que* 7 *ó*
   $2d + 3a \leq 7$.

El valor de verdad de la negación

La proposición P y su negación $\neg P$ tienen distinto valor de verdad. Así, cuando la proposición P es V, tenemos que $\neg P$ es F y viceversa. Esto lo resumimos en la siguiente tabla de verdad.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla de verdad para la negación

1.2.2. Disyunción

El enlace gramatical "o" tiene dos interpretaciones que en general se dan según el contexto: inclusivo y exclusivo. En matemática, a menos que se especifique otra cosa, el enlace "o" se utiliza en sentido inclusivo, es decir: "A o B" significa que se afirma A, o que se afirma B, o bien que se afirman ambas.

Definición 1.2.2 *La proposición $A \vee B$ se llama disyunción de A con B, y la leemos como A o B.*

Ejemplo 2 *P: 13 es número impar o cuadrado perfecto.*

La proposición P está formada por las proposiciones simples

p: 13 es impar y q: 13 es cuadrado perfecto.

Simbólicamente escribimos $p \vee q$.

La proposición $P : p \vee q$ afirma verbalmante que: el número 13 es impar, o que el número 13 es cuadrado perfecto, o bien que: el número 13 es a la vez impar y cuadrado perfecto.

El valor de verdad de la disyunción

El valor de verdad se obtiene de acuerdo a los diyuntandos, junto con la interpretación inclusiva. Por lo tanto:

El único caso en que $p \vee q$ es F ocurre cuando p es F y q es F.

Por lo tanto afirmamos que es V la proposición $p \vee q$ cuando es V al menos una de las proposiciones que la forman.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla de verdad para la disyunción

Ejemplo 3 *Considérese la proposición $Q: (3+2=4) \vee (3+2=5)$.*

En este caso, $p: 2+2=5$ es F, mientras que $q: 2+3=5$ es V. Como al menos una de las proposiciones es verdadera, concluimos que Q es V.

1.2.3. Conjunción

Definición 1.2.3 *La conjunción de* P *con* Q *es la proposición* $P \wedge Q$ *y se lee como "*P *y* Q*".*

El valor de verdad de la conjunción

El significado de la conjunción coincide con la interpretación que usualmente se tiene para el enlace "y".

La conjunción $P \wedge Q$ es V únicamente en caso de que ambas proposiciones sean verdaderas, y es F en cualquier otro caso.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla de verdad para la conjunción

Ejemplo 4 *Sea* P : *"12 es divisible por 3 y 4". Esta proposición consta de las proposiciones simples*

p : *12 es divisible por 3* $\qquad$ q : *12 es divisible por 4.*

que son V. Por lo que la proposición $p \wedge q$ *es V.*

1.2.4. Propiedades conmutativa y asociativa

Tanto la conjunción como la disyunción tienen las propiedades conmutativa y asociativa. A reserva de abordar el tema formalmente, veremos dichas propiedades pues éstas se observan inmediatamente del significado del conectivo correspondiente.

Conmutatividad

Puesto que no importa el orden para determinar el valor de verdad, a la proposición $p \vee q$ la consideramos igual que la proposición $q \vee p$ (tienen el mismo mensaje), ya que tienen los mismos valores de verdad, sin importar el orden: cualquiera de ellas es F en el único caso en que p es F y q es F.

Con argumentos similares, afirmamos que la proposición $p \wedge q$ es igual a $q \wedge p$ (tienen el mismo mensaje), debido a que, sin importar el orden, cualquiera de ellas es verdadera en el único cas en que p es V y q es V.

Asociatividad

Tanto la conjunción como la disyunción son operaciones binarias, esto es que para obtener una proposición a través de cualesquiera de los conectivos $\vee$, $\wedge$ se requieren dos proposiciones componentes (disyuntandos, conjuntandos, respectivamente); dichas proposiciones, a su vez, pueden ser simples o compuestas. Dos casos específicos pueden ser tratados inmediatamente:

1. Disyunción. El que una disyunción a su vez esté formada por una o más diyunciones tiene distintas formas pero una misma interpretación. Empezamos con la proposición $P \vee (Q \vee R)$, que se considera con igual significado que $(P \vee Q) \vee R$ por tener el mismo mensaje. Recuérdese que la disyunción $P \vee (Q \vee R)$ es F en el único caso de que ambas proposiciones P y $(Q \vee R)$ sean F. A su vez, $Q \vee R$ es F en el único caso de que Q y R sean F. Entonces, la proposición $P \vee (Q \vee R)$ es F en el único caso de que las proposiciones P, Q y R son F. La misma conclusión puede obtenerse de la proposición $(P \vee Q) \vee R$.

   Si además consideramos la propiedad conmutativa (cambiar el orden de los disyuntandos), tenemos que la proposición $P \vee (Q \vee R)$ tiene el mismo significado que cualquiera de las proposiciones:

$$\begin{array}{ccc} P \vee (R \vee Q) & (Q \vee R) \vee P & (R \vee Q) \vee P \\ (P \vee R) \vee Q & (R \vee P) \vee Q & Q \vee (P \vee R) \\ Q \vee (R \vee P) & R \vee (P \vee Q) & R \vee (Q \vee P) \\ & \text{¿Cuál falta?} & \end{array}$$

Sin peligro de confusión, escribiremos $P \vee Q \vee R$ en lugar de cualquiera de las proposiciones anteriores

2. Un análisis análogo, ahora con la conjunción, concluye que cualquiera de las siguientes proposiciones tiene igual significado que la proposición $(P \wedge Q) \wedge R$.

$$\begin{array}{ccc} P \wedge (R \wedge Q) & (Q \wedge R) \wedge P & (R \wedge Q) \wedge P \\ (P \wedge R) \wedge Q & (R \wedge P) \wedge Q & Q \wedge (P \wedge R) \\ Q \wedge (R \wedge P) & R \wedge (P \wedge Q) & R \wedge (Q \wedge P) \end{array}$$

Análogamente escribimos $P \wedge Q \wedge R$ para denotar cualquiera de las proposiciones anteriores.

1.2.5. Implicación

El mecanismo para describir los fenómenos causa-efecto es a través de las proposiciones condicionales.

Definición 1.2.4 *Sean P, Q proposiciones. Llamamos implicación a toda afirmación de la forma*

"Si P entonces Q"

Simbólicamente usamos el conectivo "$\Rightarrow$" y escribimos $P \Rightarrow Q$.

En $P \Rightarrow Q$, la proposición al inicio de la flecha (en este caso P) se llama antecedente o hipótesis, mientras que la proposición al final de la flecha (Q) se llama consecuente o tesis (la hipótesis "antecede" a la tesis). También haremos referencia a $P \Rightarrow Q$ como proposición condicional (la tesis es "consecuencia de la hipótesis")

Ejemplos 3

Q_1 : *si 2 es un entero par, entonces $2+1$ es un numero primo*

Q_2 : *si Juan usa lentes, entonces Juan es inteligente*

R : *si $1 < 0$ entonces Juan copia en los exámenes*

En la proposición Q_1 el antecedente es "*2 es un entero par*", y el concecuente es la proposición "*$2+1$ es un número primo*". En la proposición R el antecedente nada tiene que ver con el consecuente, sin embargo es una proposición bien definida, pues ambas son proposiciones lógicas.

Existen otras formas para la estructura "*si ..., entonces...* ," por ejemplo la proposición "*es suficiente que 2 sea par para que $2+1$ sea primo*" tiene el mismo significado que la proposición Q_1, de arriba, por tanto es una implicación. En general otras formas verbales provienen de la interpretación causa-efecto para $P \Rightarrow Q$:

- *Q, si P*
- *Si P, Q*

- *Q sólo si P*
- *P implica Q*
- *Q siempre que P*
- *P es condición suficiente para Q*
- *Siempre que P, Q*
- *P es suficiente para Q*

Valor de verdad para la implicación

El objetivo de la proposición condicional es describir fenómenos del tipo causa-efecto:

Se concluye Q como consecuencia de P

Interpretaremos las implicaciones de esta forma a pesar de que no todas las proposiciones condicionales describen propiamente tales fenómenos, como la proposición R (ejemplo 3) antes citada.

¿Cuándo es falsa la implicación ?

> $P \Rightarrow Q$ *es falsa cuando la condición causa-efecto falla*, esto ocurre únicamente cuando el antecedente P es V (se tiene la causa) y el consecuente Q es F (pero no el efecto).

¿Cuándo es verdadera la implicación ?

> Puesto que se trata de proposiciones lógicas, en todos los casos en que no falla la causa-efecto, la implicación es V.
>
> También afirmamos que $P \Rightarrow Q$ es verdadera cuando la condición causa-efecto se cumple.
>
> ¿Qué pasa si P no ocurre (P es F)?
>
> Si no es posible determinar que el fenómeno falla, aceptaremos que la relación causa-efecto se satisface. Es decir, la implicación es V. Resumimos este análisis en la siguiente tabla.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla de verdad para $P \Rightarrow Q$

Las posibilidades para que la implicación sea verdadera son: antecedente F o consecuente V, que se obtienen de acuerdo con el valor de verdad de la disyunción $\neg P \vee Q$. En este sentido es que se le conoce como implicación material.

Asociadas a la proposición condicional $P \Longrightarrow Q$ se tienen dos implicaciones, que generalmente aparecen en los métodos de demostración:

- La implicación recíproca $Q \Longrightarrow P$: intercambia el antecedente con el consecuente (tiene distinto significado que $P \Longrightarrow Q$).
- La contrarrecíproca: intercambia el antecedente con el consecuente y los niega, $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ (tiene el mismo significado que $P \Longrightarrow Q$).

Ejemplos 4

- *La recíproca de la proposición* Q_2 *(ejemplo 3) es la proposición:*

  si Juan es inteligente, entonces Juan usa lentes.

- *La contrarrecíproca de* Q_2 *es la proposición:*

  si Juan no es inteligente, entonces Juan no usa lentes.

1.2.6. Proposiciones compuestas en general

Con los conectivos primarios podemos construir nuevas proposiciones, pues las operaciones son aplicables tanto a proposiciones simples como a proposiciones compuestas, por ejemplo: $(P \wedge Q) \vee R$, $(\neg P \Rightarrow Q) \vee \neg R$, $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$, $(P \wedge \neg Q \wedge R) \Rightarrow (\neg S \vee W)$, donde P, Q, R, S y W pueden ser simples o compuestas.

Los paréntesis son delimitadores: símbolos del lenguaje que ayudan a identificar el conectivo principal de cada proposición. Por ejemplo en $(P \Rightarrow Q) \vee \neg R$, se trata de una diyunción formada por las proposiciones $P \Rightarrow Q$ y $\neg R$. El paréntesis no fue necesario para $\neg R$, ya que no se presta a confusión.

Ahora construiremos tablas de verdad para proposiciones en general. El procedimiento lo planteamos a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 *Obtener la tabla de verdad para* $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$.

Comenzamos por determinar todas las combinaciones de valores de los átomos en la proposición principal. Para realizarlo de manera práctica, se sugiere el siguiente procedimiento.

Se coloca una columna para cada uno de los átomos (p, q, r *).*

La tabla consta de $2^3 = 8$ *renglones, uno por cada combinación posible de valores de las proposiciones componentes. En general, si se trata de* n *proposiciones simples, entonces el número de renglones que tiene la tabla es* 2^n.

Colocar en la primera columna (elijamos la proposición p*) 8 valores de verdad, 4 verdaderos y 4 falsos. En general, para* 2^n*, la mitad de renglones V y la otra mitad F.*

En la segunda columna deben ir intercalados 2 verdaderos seguidos de 2 falsos. En el caso general, la mitad del paso en la columna anterior.

En la tercera columna (abajo de r*, en nuestro caso) colocamos 1 verdadero seguido de 1 falso (la mitad del paso en la columna anterior). De esta forma tenemos todas las posibles combinaciones.*

Agregamos una columna para cada proposición auxiliar, que son parte de la proposición principal; en nuestro caso tenemos las proposiciones $p \wedge q$ *y* $\neg r$*. Luego procedemos a llenar los renglones con los valores según el conectivo y los valores de las proposiciones en columnas anteriores.*

Además, para etiquetar las proposiciones involucradas (columnas) agregamos un renglón en la parte superior de la tabla.

La última columna (columna principal) corresponde a la proposición completa, en este caso: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$(p \wedge q) \implies \neg r$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Tabla de verdad para $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$

Observación 1.2.5 *El valor de verdad de una proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la forman, lo cual se conoce como "principio de verdad funcional".*

1.2.7. Bicondicional

Para hablar de equivalencias, necesitamos de una forma proposicional más.

Definición 1.2.6 *Sean P y Q proposiciones lógicas. La proposición $P \Leftrightarrow Q$ es definida (interpretada) como:*

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

y se le llama proposición bicondicional.

El conectivo bicondicional "$\Leftrightarrow$" se lee como "si y sólo si". Puede apreciarse que el conectivo principal es $\wedge$, es decir que se trata de una conjunción entre una implicación y su recíproca. Verbalmente, se tienen diferentes formas para la proposición bicondicional, algunas son:

P si y sólo si Q.

Es P si es Q.

P cuando y sólo cuando, Q.

P es necesario y suficiente para Q.

Si P entonces Q, y si Q entonces p.

Interpretación de la bicondicional

Gracias a la interpretación de la implicación y la conjunción, tenemos la tabla de verdad de la proposición bicondicional.

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla de verdad para la Bicondicional

Observación 1.2.7 *De la tabla de verdad concluimos que: $P \Leftrightarrow Q$ es verdadera si ambas proposiciones que la forman tienen el mismo valor de verdad, y es falsa en el caso de que P y Q tengan valores distintos.*

1.3. Tautología y contradicción

Definición 1.3.1 *Una tautología es una proposición que por su forma sintáctica (simbólica) sólo puede ser verdadera, sin importar el contenido o interpretación de las proposiciones simples que la formen.*

Ejemplo 6 *La forma más simple para una tautología es* $T:\ p \vee \neg p$*. Que en particular, haciendo* $p:$ *"15 es número primo", verbalmente puede ser:*

15 es número primo o no es primo.

La proposición $P \vee \neg P$ *se conoce como principio del tercero excluido (ejercicio 1.9).*

Observación 1.3.2

- *Una proposición simple no puede ser tautología, pues simbólicamente tiene dos posible valores en su tabla de verdad.*
- *Una tautología tiene únicamente el valor V en toda la columna principal de su tabla de verdad.*

Ejercicios 1 *Verificar, haciendo las tablas de verdad, que las siguientes proposiciones son ejemplos de tautologías.*

1. $P \Longrightarrow (Q \Rightarrow P)$.
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Longrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $(P \wedge Q) \Longrightarrow P$.
4. $(P \wedge Q) \Longrightarrow Q$.
5. $A \Longrightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$.
6. $P \Longrightarrow (P \vee Q)$.
7. $Q \Longrightarrow (P \vee Q)$.
8. $(A \Rightarrow C) \Longrightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$.
9. $P \vee \neg P$ *(principio del tercero excluido)*
10. $P \Longrightarrow P$ *(pricipio de identidad).*
11. $\neg(P \wedge \neg P)$ *(principio de no contradicción)*
12. $(P \Rightarrow R) \Longrightarrow ((P \Rightarrow \neg R) \Rightarrow \neg P)$ *(reductio ad absurdum)*
13. $P \Longrightarrow (Q \vee \neg Q)$.

Como ya se habrá notado, una tautología no puede ser falsa. Con ello desarrollaremos un método para determinar si una proposición es o no tautología.

Observación 1 *Si la proposición* P *es falsa para alguna combinación de valores en al menos un renglón en la columna principal, entonces* P *no es tautología.*

Ejemplo 7 *Determinar si* $[(R \Rightarrow Q) \Rightarrow R] \Longrightarrow R$ *es tautología.*

Buscaremos una combinación de valores, observación 1, para las proposiciones R *y* Q*, que haga falsa la proposición. En caso de hallar la combinación conluiremos que la proposición no es una tautología. Pero si determinamos que no es posible tal combinación, la proposición es una tautología.*

1. *Dado que el conectivo principal es una implicación, la única posibilidad para que sea F la proposición principal es: antecedente V y consecuente F. Así, nuestra búsqueda inicia con la restricción*

   $(R \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ *es V* *y* R *es F.*

   Ya tenemos un primer valor, R *es F. Resta encontrar un valor para* Q*. Por ello nos fijamos en* $(R \Rightarrow Q) \Rightarrow R$*, que ya fijamos como V.*

2. $R \Rightarrow Q$ *es V, sin importar el valor de* Q*, pues* R *es F (de 1).*

3. $(R \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ *es F, por 2.* **Lo que no puede ocurrir**

   Según nuestra condición 1, $(R \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ *es V, y no es posible para una proposición (lógica) ser V y F en una misma interpretación (renglón). Entonces, no existe una combinación de valores para que la proposición principal sea F. Es decir, la proposición sólo puede ser V.*

Por lo tanto, la proposición $[(R \Rightarrow Q) \Rightarrow R] \Longrightarrow R$ *es tautología.*

La contraparte de una tautología es una contradicción.

Definición 1.3.3 *Una proposición que por su forma sólo puede ser falsa, se llama contradicción.*

Ejemplos 5 *Puede comprobarse que la proposición* $P \wedge \neg P$ *es una contradicción,*

La negación de una tautología es una contradicción, y la negación de una contradicción es una tautología.

1.4. Equivalencias y álgebra proposicional

Definición 1.4.1 *Sean* P, Q *dos proposiciones, decimos que* P *es equivalente a* Q *si la proposición* $P \Leftrightarrow Q$ *es tautología.*

Observación 2 *Simbólicamente escribimos* $P \equiv Q$ *para indicar la equivalencia entre* P *y* Q*.*

Ejemplo 8 *Verificar que* $P : p_1 \wedge p_2$ *y* $Q : \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$ *son equivalentes.*

Gracias a la tabla de $P \Leftrightarrow Q$*, concluimos que* $p_1 \wedge p_2 \equiv \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$*, pues la bicondicional es tautología.*

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$	$(p_1 \wedge p_2) \Longleftrightarrow \neg(\neg p_1 \vee \neg p_2)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

Por supuesto que el método basado en buscar una combinación que haga falsa la proposición $P \Leftrightarrow Q$*, puede ser usado para determinar si dos proposiciones son o no equivalentes.*

Afirmación 1 *Puede comprobarse que:*

1. *Cualesquiera dos tautologías* T_1 *y* T_2*, son equivalentes.*

2. *Cualesquiera dos contradicciones* C_1 *y* C_2*, son equivalentes.*

Álgebra proposicional

Las leyes de la lógica se expresan adecuadamente en términos de equivalencias. Además éstas servirán como propiedades para simplificar proposiciones complejas.

Ejercicios 2 *Verificar las siguientes equivalencias.*

1. *Doble negación.* $\neg(\neg P) \equiv P$
2. *Propiedad conmutativa.* $P \vee Q \equiv Q \vee P$ *y* $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
3. *Propiedad asociativa.*

   $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R)$ *y* $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
4. *Propiedad distributiva.*

   $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ *y* $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
5. *Leyes de De Morgan.* $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$ *y* $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$
6. *Implicación material.* $P \Longrightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
7. *Leyes de idempotencia.* $P \vee P \equiv P$ *y* $P \wedge P \equiv P$
8. *Leyes de absorción.* $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$ *y* $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
9. *Leyes de simplificación. Sean* T *tautología y* C *contradicción. Entonces*

   $$P \vee T \equiv T \qquad P \vee C \equiv P$$

   $$P \wedge T \equiv P \qquad P \wedge C \equiv C$$

   Consideraremos como válidas las siguientes propiedades
10. *Reflexiva.* $P \equiv P$
11. *Simétrica. Si* $P \equiv Q$, *entonces* $Q \equiv P$.
12. *Transitiva. Si* $P \equiv Q$ *y* $Q \equiv R$, *entonces* $P \equiv R$
13. *Si* $P \equiv Q$, *entonces* $\neg P \equiv \neg Q$
14. *Sustitución. Si* $P \equiv Q$, *entonces* P *puede ser sustituida por* Q *en cualquier proposición* A, *en la que aparezca* P, *sin cambiar el valor de* A.

Con estas leyes y propiedades nos apoyamos para obtener y justificar equivalencias. El procedimiento se plantea de forma general: se inicia con la proposición más compleja; mediante leyes de equivalencia se transforma sucesivamente la proposición inicial, hasta llegar a la proposición deseada.

Ejemplos 6 *Demostrar las siguientes equivalencias aplicando propiedades.*

1. $R \wedge (Q \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \equiv R$

   Demostración. Partimos de la parte izquierda

$$\begin{aligned}
R \wedge [Q \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)] &\equiv R \wedge (Q \vee [(P \vee \neg P) \wedge \neg Q]) && \textit{L4.}\\
R \wedge (Q \vee [(P \vee \neg P) \wedge \neg Q]) &\equiv R \wedge (Q \vee [T \wedge \neg Q]) && \textit{L14.}\\
R \wedge (Q \vee [T \wedge \neg Q]) &\equiv R \wedge (Q \vee \neg Q) && \textit{L9.}\\
R \wedge (Q \vee \neg Q) &\equiv R \wedge T && \textit{L14.}\\
R \wedge T &\equiv R && \textit{L9.}
\end{aligned}$$

Aplicando sucesivamemte la propiedad transitiva, junto con las propiedades citadas, tenemos la equivalencia.

2. $\neg P \wedge \neg Q \wedge R \equiv (P \Longrightarrow Q) \wedge \neg(R \Longrightarrow Q)$.

   Demostración.

$$\begin{aligned}
(P \Longrightarrow Q) \wedge \neg(R \Longrightarrow Q) &\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg R \vee Q)) && \textit{L6.}\\
&\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg R \wedge \neg Q)) && \textit{L5.}\\
&\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (R \wedge \neg Q) && \textit{L1.}\\
&\equiv (\neg P \wedge (R \wedge \neg Q)) \vee (Q \wedge (R \wedge \neg Q)) && \textit{L4.}\\
&\equiv (\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge (\neg Q \wedge R)) && \textit{L2.}\\
&\equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge R) \vee ((Q \wedge \neg Q) \wedge R) && \textit{L3.}\\
&\equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge R) \vee (C \wedge R) && \textit{L14.}\\
&\equiv ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge R) \vee C && \textit{L9.}\\
((\neg P \wedge \neg Q) \wedge R) \vee C &\equiv \neg P \wedge \neg Q \wedge R && \textit{L9.}
\end{aligned}$$

3. *Justifique los pasos en la simplificación de:* $(P \wedge Q) \vee ((R \vee P)) \wedge \neg Q)$.

   Demostración. $(P \wedge Q) \vee ((R \vee P) \wedge \neg Q) \equiv$

$$\begin{aligned}
&\equiv ((P \wedge Q) \vee (P \vee R)) \wedge ((P \wedge Q) \vee \neg Q)\\
&\equiv ((P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q))\\
&\equiv ((P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge T)\\
&\equiv (P \vee (P \vee R)) \wedge (Q \vee (P \vee R)) \wedge (P \vee \neg Q)\\
&\equiv ((P \vee P) \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q)\\
&\equiv (P \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R) \wedge (P \vee \neg Q)\\
&\equiv [(P \vee R) \wedge ((Q \vee P) \vee R)] \wedge (P \vee \neg Q)\\
&\equiv [(P \wedge (Q \vee P)) \vee R] \wedge (P \vee \neg Q)\\
&\equiv P \vee (R \wedge \neg Q)
\end{aligned}$$

Ejercicios 3

i. *Verifique las siguientes equivalencias, que pueden ser usadas como propiedades.*

   a) $\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ *Negación de la implicación*

   b) $P \Longrightarrow Q \equiv \neg Q \Longrightarrow \neg P)$ *Contrarrecíproca*

   c) $(P \vee Q) \Longrightarrow R \equiv (P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$ *Casos.*

ii. *Simplificar las siguientes proposiciones:*

   a) $(P \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \vee (P \wedge \neg Q)$.

   b) $((P \wedge Q) \wedge S) \vee ((P \wedge \neg S) \wedge (Q \wedge \neg S)) \vee ((P \wedge \neg Q) \wedge (Q \wedge \neg Q))$.

iii. *Justifique, en cada caso, por qué las proposiciones dadas no son equivalentes*

   a) $P_1 \vee P_2 \Longrightarrow Q$ *y* $(P_1 \Longrightarrow Q) \vee (P_2 \Longrightarrow Q)$.

   b) $P_1 \wedge P_2 \Longrightarrow Q$ *y* $(P_1 \Longrightarrow Q) \wedge (P_2 \Longrightarrow Q)$.

Definiciones

Las definiciones descriptivas se emplean en los diccionarios y se dirigen a delimitar la comprensión de una idea. Además, en la matemática interpretamos una definición como una equivalencia $P \equiv Q$ y la usamos en los dos sentidos, esto es: si se tienen las condiciones determinadas por Q, entonces la podemos sustituir por P, y viceversa.

Ejemplo 9 *Se dice que n es impar, si existe un entero m tal que $n = 2m + 1$. Por lo que tenemos dos afirmaciones:*

1. *Sea n un entero impar. Entonces existe un entero m tal que $n = 2m + 1$.*
2. *Si $n = 2m + 1$, para algún entero m, entonces afirmamos que n es impar.*

1.5. Cuantificadores

Lo que podemos expresar con el lenguaje proposicional no es suficiente para expresar toda la Matemática. Necesitamos del lenguaje predicativo.

En el álgebra de predicados se analiza la estructura interna de las proposiciones, distinguiendo en ellas sus dos términos, uno como sujeto y el otro como predicado. Dicha distinción se hace conforme al criterio formal de que el sujeto es el único término que es determinado en cada proposición, mientras que el predicado es el único término determinante en la misma proposición.

1.5.1. Proposiciones abiertas

En lo que resta del capítulo, heremos referencia a la colección de objetos $\mathbb{U}$ como el universo de discurso (universo de sujetos) o únicamente universo. Posteriormente, en el siguiente capítulo lo retomaremos.

Definición 1.5.1 *Una proposición abierta $p(x)$ (predicado monádico) en $\mathbb{U}$, es un enunciado que contiene una variable como sujeto tal que: al sustituir la variable por un elemento específico del universo se obtiene una proposición lógica. Es decir, si a es un elemento de $\mathbb{U}$, entonces $p(a)$ es una proposición lógica que afirma algo acerca del sujeto a.*

En forma general, hablamos de la proposición abierta $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ como un enunciado conteniendo las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en los términos anteriores.

Ejemplo 10 *Sean $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ y $p(x)$: "x es un cuadrado perfecto". Entonces obtenemos las proposiciones lógicas:*

- *$p(1)$: 1 es un cuadrado perfecto.*
- *$p(2)$: 2 es un cuadrado perfecto.*
- *$p(3)$: 3 es un cuadrado perfecto.*
- *$p(4)$: 4 es un cuadrado perfecto.*

que tienen valores V, F, F y V, respectivamente.

Observación 1.5.2 *Si b es un elemento tal que $p(b)$ es V, decimos que b satisface $p(x)$ o bien que $p(x)$ se satisface en b.*

El álgebra de predicados contiene por completo el álgebra proposicional, puesto que incluye las proposiciones elementales, así como las proposiciones obtenidas a través de los conectivos, y éstas pueden ser verdaderas o falsas. Esto es, el predicado puede ser construido con ayuda de los conectivos, además de que podemos construir proposiciones compuestas en general, que incluyan conectivos y cuantificadores.

1.5.2. Cuantificador universal

Hay una clase de proposiciones (lógicas) en Matemática, tales como:

- *Todo números elevado al cuadrado es mayor o igual a cero.*

  En nuestro lenguaje diario también aparecen:

- *Cada persona adulta tiene derecho a votar.*

A diferencia de las ya estudiadas, este tipo de proposiciones hace referencia a todo un universo de individuos u objetos, satisfaciendo cierta propiedad. Cuando la colección es finita es posible representar simbólicamente este tipo de proposiciones mediante una conjunción. Pero si la colección es infinita, entonces necesitamos considerar nuevos símbolos que nos permitan expresarla.

La proposición: "*Todos los números pares son divisibles por dos*" tiene su representación simbólica como:

$$\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$$

El símbolo $\forall$ se llama cuantificador universal y representa la frase "todos"

El universo $\mathbb{U}$ representa la colección de los números pares.

Con $p(x)$ denotamos a la proposición abierta *"x es divisible por dos"*.

El cuantificador universal también se lee como:

- Todo ...
- Para todo ...
- Cada ...
- Cualquier ...

Para una misma proposición, la representación simbólica no necesariamente es única. Fijémonos en la proposición:

Los números primos no son múltiplos de nueve

En esta afirmación, el cuantificador y el universo se encuentran implícitos.

- Eligiendo a $\mathbb{U}$ como la colección de los números primos y la proposición abierta $p(x)$*: x es múltiplo de nueve*, tenemos:
$$\forall x \in \mathbb{U} : \neg p(x)$$

- Ahora, considerando a $\mathbb{U}$ como el universo de los números enteros y las proposiciones abiertas $p(x) : x$ *es un número primo* y $q(x) : x$ *es múltiplo de nueve*, tenemos:

$$\forall x \in \mathbb{U} : p(x) \Rightarrow \neg q(x)$$

Así que, según la elección del universo, es posible tener representaciones simbólicamente distintas de una misma proposición cuantificada universalmente.

El valor de verdad de $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$.

Con base en el significado que usualmente tenemos para expresiones cuantificadas universalmente, contamos con un criterio para determinar su valor de verdad.

Definición 1.5.3 *La proposicion $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$ es verdadera si y sólo si la proposición $p(a)$ es verdadera en cada elemento a del universo $\mathbb{U}$.*

Ejemplos 7 *Sea $\mathbb{U} = \{1, 3, 5\}$.*

1. *Dada la proposición $\forall x \in \mathbb{U} : x$ es menor que 6.*

$$p(1) : 1 < 6 \quad (V)$$
$$p(3) : 3 < 6 \quad (V)$$
$$p(5) : 5 < 6 \quad (V)$$

Entonces $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$ es V, pues cada elemento del universo satisface la proposición abierta $p(a)$ (es V en cada elemento del universo).

2. *Sea $q(x)$ la proposición abierta dada por $q(x) : x$ es mayor que 3. Tenemos:*

$$q(1) : 1 \textit{ es mayor que } 3 \quad (F).$$

Entonces $\forall x \in \mathbb{U} : q(x)$ es F, ya que no es posible tener $q(a)$ V con cada elemento de $\mathbb{U}$.

Como puede observarse en el ejemplo 7, la proposición $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$ tiene el mismo comportamiento que la conjunción $p(1) \wedge p(3) \wedge p(5)$ (universo finito) y la proposición $q(1) \wedge q(3) \wedge q(5)$ tiene el mismo comportamiento que $\forall x \in \mathbb{U} : q(x)$. Es en este sentido en que interpretamos el cuantificador universal como una generalización de la conjunción.

Observación 3 *La proposición $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$, con $\mathbb{R}$ el universo de los números reales es verdadera, sin embargo es imposible sustituir todos los valores del universo, pues $\mathbb{R}$ es infinito. Posteriormente veremos métodos de demostración con los que podremos garantizar la validez de este tipo de proposiciones.*

1.5.3. Cuantificador existencial

Toca el turno a las proposiciones cuantificadas existencialmente. Considérese la proposición:

Algunos números naturales son mayores que 1999

que representamos simbólicamente como:

$$\exists\, x \in \mathbb{U} : q(x)$$

Con el símbolo "$\exists$", llamado cuantificador existencial, denotamos la expresión "algunos", con $\mathbb{U}$ al universo de los números naturales y con $q(x)$ denotamos la proposición abierta "*x es mayor que 1999*". Otras expresiones para el cuantificador existencial son:

Existe, hay un, para algún, ...

Al igual que con el cuantificador universal, la elección del universo nos puede llevar a proposiciones abiertas estructuralmente distintas.

El valor de verdad para $\exists x \in \mathbb{U} : p(x)$.

Análogo a la interpretación del cuantificador universal, el cuantificador existencial puede ser considerado como una generalización de la disyunción (en universos finitos tienen la misma interpretación).

Definición 1.5.4 *La proposición* $\exists x \in \mathbb{U} : p(x)$ *es verdadera si y sólo si*

$$p(a) \text{ es V, para algún } a \text{ en } \mathbb{U}.$$

Pueden tenerse más de un elemento que haga verdadera a $p(x)$, incluso todos, pero para que sea verdadera $\exists x \in \mathbb{U} : p(x)$ es suficiente contar con un elemento a del universo tal que $P(a)$ es V. En el caso de un universo finito, dentro de lo posible se puede determinar el valor de verdad. Sin embargo, para universos infinitos, al igual que con el cuantificador universal, necesitaremos de algunos métodos de demostración.

Ejemplos 8 *Sea* $\mathbb{U} = \{1, 3, 5\}$.

1. $r(x) : x$ *es primo. Entonces la proposición* $\exists x \in \mathbb{U} : r(x)$ *es V, ya que* $r(3)$ *es V. Observe que* 3 *no es el único elemento en el que* $r(x)$ *se satisface.*

2. $S(x) : x + 3 = 9$. *La proposición* $\exists x \in \mathbb{U} : S(x)$ *es F, pues ningún elemento de* $\mathbb{U}$ *hace V la proposición* $S(x)$.

$$\begin{aligned} S(1) &: 1 + 3 = 9 \quad (F) \\ S(3) &: 3 + 3 = 9 \quad (F) \\ S(5) &: 5 + 3 = 9 \quad (F) \end{aligned}$$

Negación en los cuantificadores

Los cuantificadores universal y existencial han sido interpretados como una generalización de la conjunción y disyunción, respectivamente. Dado que para los conectivos $\wedge$ y $\vee$ se cuenta con las leyes de De Morgan, las siguientes equivalencias son consideradas también como parte de esta generalización (ejercicio 2).

Afirmación 2

a) $\neg(\, \forall x \in \mathbb{U} : p(x)\,) \equiv \exists x \in \mathbb{U} : \neg p(x)$.

b) $\neg(\, \exists x \in \mathbb{U} : q(x)\,) \equiv \forall x \in \mathbb{U} : \neg q(x)$

Esto es, la negación de una proposición cuantificada universalmente es equivalente a una proposición existencial, y la negación de una proposición cuantificada existencialmente es equivalente a una proposición universal, en ambos casos con la negación de la proposición abierta.

En general hay proposiciones que involucran uno o más cuantificadores universal, existencial o ambos, por ejemplo:

Toda ecuación de la forma $a + x = b$, *con* a, b *enteros, tiene solución en* $\mathbb{Z}$

que simbólicamente tiene la forma:

$$\forall a \in \mathbb{Z}\, [\, \forall b \in \mathbb{Z}(\, \exists x \in \mathbb{Z} : \ a + x = b)\,]$$

Usando reiteradamente la afirmación 2, su negación queda como:

$$\neg\, (\, \forall a \in \mathbb{Z} : \ [\, \forall b \in \mathbb{Z} : (\, \exists x \in \mathbb{Z} : \ a + x = b)\,]\,) \equiv$$

$$\equiv \exists a \in \mathbb{Z} : [\, \exists b \in \mathbb{Z} : (\, \forall x \in \mathbb{Z} : \ a + x \neq b)\,]$$

1.6. Deducción matemática

El razonamiento es un encadenamiento de juicios en que partiendo de una proposición conocida se descubre otra u otras. Aristóteles se ocupó tanto del razonamiento deductivo como del inductivo, pero consideraba que el conocimiento científico se alcanza deduciendo lo particular de lo general, es decir, con el conocimiento de las causas, por lo que le otorga privilegio al análisis. La estructura de un razonamiento se puede entender de la siguiente manera: *como consecuencia de una lista de afirmaciones, las premisas, se obtiene la conclusión.*

Definición 1.6.1 *Un razonamiento es una proposición condicional de la forma:*

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_k) \Longrightarrow Q$$

Cada una de las proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_k$ *son premisas y la proposición* Q *es la conclusión. Por costumbre y conveniencia, escribimos:*

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \hline Q \end{array}$$

La línea, que separa las premisas de la conclusión, puede leerse como "por lo tanto"

Ejemplo 11 *Consideremos el siguiente razonamiento:*

> *Si hoy llueve, se moja la tierra del campo. Hoy llueve. Por lo tanto la tierra del campo se moja.*

Que escribimos como:

$$\begin{array}{l} \textit{Si hoy llueve, entonces la tierra del campo se moja} \\ \textit{Hoy llueve} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{\textit{La tierra del campo se moja}} \end{array}$$

Haciendo p: Hoy llueve, y q: la tierra del campo se moja, simbólicamente tenemos:

$$\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ p \\ \hline \multicolumn{1}{c}{q} \end{array} \qquad o \qquad \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \hline Q \end{array}$$

1.6.1. Razonamiento válido

Estamos interesados por aquellos razonamientos apropiados: que nos garantizen la verdad de una afirmación cuando ésta proviene como conclusión de afirmaciones verdaderas. Es decir que las construcciones fundamentadas en verdades sean confiables (válidas).

Definición 1.6.2 *Un razonamiento es válido cuando no es posible tener conclusión falsa que proviene de premisas verdaderas.*

Es decir que un razonamiento es válido cuando de premisas verdaderas sólo se obtiene conclusión verdadera.

Debido a la forma de proposición condicional del razonamiento válido y a su interpretación, pues no puede darse el caso de tener premisas (antecedente) verdaderas y conclusión (consecuente) falsa, tenemos la siguiente afirmación.

Afirmación 3 *El razonamiento* $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_k) \Longrightarrow Q$ *es válido si y sólo si es tautología.*

Ejemplos 9

1. *Analicemos la regla conocida como Modus Ponendo Ponens, o simplemente Modus Ponens (MP).*

$$\begin{array}{c} p \Longrightarrow q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

Su forma simbólica, como proposición condicional, es: $(\,(p \Rightarrow q) \wedge p\,) \Longrightarrow q$.

Puesto que no es posible tener una combinación de valores para p *y* q *tales que sea* F *(compruébelo), concluimos que* $(\,(p \Rightarrow q) \wedge p\,) \Longrightarrow q$ *es tautología y por lo tanto, es un razonamiento válido.*

2. *También, puede verificarse que es un razonamiento válido la regla conocida como Tollendo Ponens:*

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg q \quad} \\ p \end{array}$$

Ejercicios 4

1. *Verificar que cada una de las siguientes reglas de inferencia es razonamiento válido.*

Ponendo Ponens (PP)

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ \underline{P \qquad\quad} \\ Q \end{array}$$

Tollendo Tollens (TT)

$$\begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ \underline{\neg Q \qquad} \\ \neg P \end{array}$$

Tollendo Ponens(TP)

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \underline{\neg P \qquad} \\ Q \end{array} \quad o \quad \begin{array}{c} P \vee Q \\ \underline{\neg Q \qquad} \\ P \end{array}$$

Ley de adición(A)

$$\begin{array}{c} \underline{P \qquad\quad} \\ Q \vee P \end{array} \quad o \quad \begin{array}{c} \underline{Q \qquad\quad} \\ P \vee Q \end{array}$$

Regla de simplificación(S)

$$\begin{array}{c} \underline{P \wedge Q} \\ P \end{array} \quad o \quad \begin{array}{c} \underline{P \wedge Q} \\ Q \end{array}$$

Regla de adjunción(A)

$$\begin{array}{c} P \\ \underline{Q \qquad} \\ P \wedge Q \end{array} \quad o \quad \begin{array}{c} P \\ \underline{Q \qquad} \\ Q \wedge P \end{array}$$

Silogismo hipotético(SH)

$$\begin{array}{c} P \Longrightarrow Q \\ \underline{Q \Longrightarrow R} \\ P \Longrightarrow R \end{array}$$

Silogismo disyuntivo(SD)

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ P \Longrightarrow R \\ \underline{Q \Longrightarrow S} \\ R \vee S \end{array} \quad o \quad \begin{array}{c} P \vee Q \\ P \Longrightarrow R \\ \underline{Q \Longrightarrow S} \\ S \vee R \end{array}$$

2. *Verifique que el siguiente razonamiento no es válido.*

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

Gracias a la definición, ahora procedemos a establecer un método sin tablas de verdad para determinar sobre la validez de un razonamiento, tomando como base el método mediante el cual determinamos si una proposición es o no tautología.

Ejemplo 12 *Determinar si es o no válido el razonamiento*

$$\begin{array}{cc} P_1 & [A \Rightarrow (B \vee \neg E)] \Rightarrow (D \wedge A) \\ P_2 & (D \Leftrightarrow B) \wedge (A \Rightarrow E) \\ P_3 & A \vee (B \wedge \neg E) \\ \hline Q & A \Longrightarrow \neg E \end{array}$$

Solución. Buscamos una combinación de valores en las proposiciones componentes, para tener conclusión F y premisas V. En este caso tenemos las restricciones iniciales 1, 2, 3 y 4.

1. $[A \Rightarrow (B \vee \neg E)] \Rightarrow (D \wedge A)$ *es V* (P_1).

2. $(D \Leftrightarrow B) \wedge (A \Rightarrow E)$ *es V* (P_2).

3. $A \vee (B \wedge \neg E)$ *es V* (P_3).

4. $A \Longrightarrow \neg E$ *es F* *conclusión falsa.*

   Como se observa en P_1 *y* P_3, *se tienen tres casos, para cada proposición, por ser verdaderas. En el caso de* P_2 *(premisa 2), luego de establecer el único caso posible, se expande en más subcasos.*

   Iniciamos nuestra búsqueda con la conclusión, por ser la afirmación que conlleva menos casos.

5. A *es V y* $\neg E$ *es F* *de 4, único caso de implicación falsa*

   Fijando estos valores (satisfaciendo conclusión F), intentaremos encontrar los valores de las proposiciones restantes que satisfagan premisas verdaderas.

   Observe que:

6. $A \vee (B \wedge \neg E)$ *es V, sin importar* $(B \wedge \neg E)$ *de 5, pues* A *es V.*

   Hasta este momento B *no tiene valor fijo.*

7. $A \Longrightarrow E$ *es V y* $D \Leftrightarrow B$ *es V* *de 2.*

   Para $A \Longrightarrow E$ *se tiene un único caso:* A *es V y* E *es V, por 5.*

8. $D \Leftrightarrow B$ *es V* *de 7.*

9. D *y* B *tienen el mismo valor (ambas V o ambas F), por 8.*

   Resta por analizar $[A \Rightarrow (B \vee \neg E)] \Rightarrow (D \wedge A)$. *Tenemos dos casos:*

Caso 1. B *es V (también* D*). Tenemos que* $B \vee \neg E$ *es V, también* $D \wedge A$ *es V, por lo que* P_1 *es V. Entonces tenemos el siguiente esquema*

$$\begin{array}{cc} P1 & V \\ P2 & V \\ P3 & V \\ \hline Q & F \end{array}$$

El razonamiento no es válido, pues hemos encontrado una combinación de valores tal que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa.

Analizar el caso 2 (B es F) no es necesario pues con una combinación que nos de premisas verdaderas y conclusión falsa es suficiente para concluir que el razonamiento no es válido.

Observación 1.6.3 *Para determinar la válidez de un razonamiento buscamos una combinación de valores que genere premisas verdaderas y conclusión falsa. Si esto es posible, entonces el razonamiento no es válido. Pero, si no es posible tener una combinación que haga conclusión falsa y premisas verdaderas, entonces el razonamiento es válido.*

Ejercicios 5 *Sin tablas de verdad.*

1. *Verifique la validez de las reglas de inferencia, ejercicio 4, sin tablas de verdad.*

2. *Determinar si son o no válidos los siguientes razonamientos.*

$$\begin{array}{c} I \Rightarrow (\neg J \wedge K) \\ (L \wedge M) \Rightarrow I \\ M \\ \hline L \Rightarrow K \end{array} \qquad \begin{array}{c} P \vee Q \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{c} P \Rightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P \\ \hline P \wedge Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} (P \vee Q) \Longrightarrow R \\ Q \Longrightarrow R \\ \hline P \Longrightarrow R \end{array} \qquad \begin{array}{c} (X \wedge Y) \wedge (X \vee Z) \\ (X \Rightarrow Z) \vee (X \vee Z) \\ (Z \vee Y) \wedge (X \wedge \neg Z) \\ \hline X \Leftrightarrow Z \end{array}$$

1.6.2. Razonamientos con cuantificadores

Puesto que no es posible proponer en forma general tablas de verdad en proposiciones cuantificadas, estudiaremos razonamientos que incluyen cuantificadores, buscando tener premisas verdaderas y conclusión falsa. Analicemos el razonamiento conocido como "Ley de particularización":

Todos los hombres son mortales. Juanito es un hombre. Por lo tanto, Juanito es mortal.

Haciendo $\mathbb{U}$ a la familia formada por todos los hombres, $p(x) : x$ *es mortal* y representando por a a Juanito, tenemos simbólicamente

$$\begin{array}{cc} P_1 & \forall x \in \mathbb{U} : p(x) \\ P_2 & a \in \mathbb{U} \\ \cline{2-2} Q & p(a) \end{array}$$

Buscamos tener premisas verdaderas y conclusión falsa.

1. $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$ es V (P_1).

2. $a \in \mathbb{U}$ es V (P_2).

3. $p(a)$ es F conclusión falsa.

4. $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$ es F de 2 y 3, por def. 1.5.3.

Lo que no puede ocurrir por 1.

Por lo tanto el razonamiento es válido.

Ejemplo 13 *Analicemos la validez de la siguiente regla de inferencia.*

$$\begin{array}{rl} P_1 & \forall x \in \mathbb{U} : p(x) \Rightarrow q(x) \\ P_2 & \forall x \in \mathbb{U} : q(x) \Rightarrow r(x) \\ \hline Q & \forall x \in \mathbb{U} : p(x) \Rightarrow r(x) \end{array}$$

Buscamos tener conclusión F con premisas V.

1. $\forall x \in \mathbb{U} : p(x) \Rightarrow q(x)$ *es V.*

2. $\forall x \in \mathbb{U} : q(x) \Rightarrow r(x)$ *es V.*

3. $\forall x \in \mathbb{U} : p(x) \Rightarrow r(x)$ *es F* *conclusión falsa.*

4. $\neg [\, \forall x \in \mathbb{U} : p(x) \Rightarrow r(x) \,]$ *es V, de 3.*

5. $\exists x \in \mathbb{U} : [\, p(x) \wedge \neg r(x) \,]$ *es V* *equivalencia con 4.*

Puesto que es V, la proposición existencial garantiza que hay un $a \in \mathbb{U}$ *tal que* $p(a) \wedge \neg r(a)$ *es V.*

6. $p(a) \wedge \neg r(a)$ *es V* *para algún* a *en* $\mathbb{U}$*, de 5, def 1.5.4.*

7. $p(a)$ *es V y* $\neg r(a)$ *es V* *de 6.*

8. $p(a)$ *es V* *de 7.*

Como P_1 *es V, cada elemento de* $\mathbb{U}$ *hace V a la proposición* $p(x) \Rightarrow q(x)$*.*

9. $p(a) \Rightarrow q(a)$ *es V* *de 1, def. 1.5.3.*

10. $q(a)$ *es V* *de 8 y 9.*

11. $r(a)$ *es F* *de 7*

12. $q(a) \Rightarrow r(a)$ *es F* *de 10 y 11.*

13. $\forall x \in \mathbb{U} : q(x) \Rightarrow r(x)$ *es F* *por 12, def. 1.5.3.*

Lo que no puede ocurrir *por 2.*

Por lo tanto el razonamiento es válido, ya que es imposible tener premisas verdaderas y conclusión falsa.

Ejercicios 6 *Verifique la validez de las siguientes reglas de inferencia*

$$\begin{array}{c} \forall x \in \mathbb{U} : p(x) \\ a \in \mathbb{U} \\ \hline p(a) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall x \in \mathbb{U} : p(x) \Rightarrow q(x) \\ (a \in \mathbb{U}) \wedge p(a) \\ \hline q(a) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \forall x \in \mathbb{U} :\ p(x) \Rightarrow q(x) \\ \forall x \in \mathbb{U} :\ q(x) \Rightarrow r(x) \\ \hline \forall x \in \mathbb{U} :\ p(x) \Rightarrow r(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exists x \in \mathbb{U} : p(x) \\ \exists x \in \mathbb{U} : q(x) \\ \hline \exists x \in \mathbb{U} : p(x) \vee q(x) \end{array}$$

1.6.3. El método directo de validez

Nos queda por explorar un método más para justificar la validez de razonamientos, el cual será de gran utilidad para establecer los métodos de demostración. Consiste en utilizar las reglas de inferencia, ejercicios 4 y 6, como herramientas de deducción pues garantizan que la conclusión es verdadera cuando proviene de premisas verdaderas. El procedimiento consta de los siguientes pasos.

1. Considerar como verdaderas las premisas (planteadas como hipótesis).
2. Mediante reglas de inferencia y leyes de equivalencia obtenemos nuevas proposiciones, también verdaderas, que incluimos en nuestra lista de premisas.
3. El paso 2 se ejecuta reiteradamente hasta llegar a la conclusión.

Entonces afirmamos que el razonamiento es válido.

Ejemplo 14 *Demostrar la validez de:*

$$\begin{array}{l} (\neg A \vee \neg B) \Longrightarrow (\neg C \Rightarrow D) \\ \neg(A \wedge B) \\ (D \Rightarrow E) \vee (A \wedge B) \\ \hline \qquad \neg C \Rightarrow E \end{array}$$

Procedemos como sigue:

1. $(\neg A \vee \neg B) \Longrightarrow (\neg C \Rightarrow D)$ *premisa*
2. $\neg(A \wedge B)$ *premisa*
3. $(D \Rightarrow E) \vee (A \wedge B)$ *premisa*
4. $\neg A \vee \neg B$ *de 2, por leyes de De Morgan*
5. $\neg C \Rightarrow D$ *de 1 y 4, por Modus Ponens* (MP)
6. $D \Rightarrow E$ *de 3 y 2, por Tollendo Ponens* (TP)
7. $\neg C \Longrightarrow E$ *de 5 y 6, por silogismo hipotético* (SH).

Puesto que llegamos a la conclusión, el razonamiento es válido.

Observación 1.6.4 *Aunque el razonamiento sea válido, puede ocurrir que no se llegue a la conclusión; esto depende de las habilidades personales. Sin embargo, el que no se llegue a la conclusión simplemente significa que no estamos en condiciones de determinar la validez y por ello, requerimos de usar otro método.*

Cuando un razonamiento es válido, decimos que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, también se acostumbra mencionar que se ha derivado la conclusión de las premisas, que la conclusión se infiere de las premisas, o que la conclusión se deduce de las premisas.

Para concluir, insistimos en afirmar que un razonamiento válido significa que la proposición:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_k) \Longrightarrow Q$$

es lógicamente verdadera. Esto es, que la implicación es verdadera sin importar los valores de las proposiciones que la formen (tautología).

Ejercicios 7

1. *En cada caso, si el razonamiento es válido haga una prueba directa. Si no es válido, justifique con otro método.*

$$\begin{array}{l} (H \wedge T) \Rightarrow (R \vee S) \\ H \\ T \\ \hline R \vee S \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg B \\ A \Rightarrow B \\ \neg A \Rightarrow C \\ \hline C \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg Q \vee S \\ \neg S \\ \neg(R \wedge S) \Rightarrow Q \\ \hline R \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \\ R \Rightarrow (Q \wedge T) \\ \hline (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \wedge T) \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \Leftrightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} (P \vee R) \Rightarrow S \\ P \wedge Q \\ \hline P \wedge S \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg T \\ Q \Rightarrow T \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg A \vee B \\ \neg A \Rightarrow E \\ \neg E \\ \hline B \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee \neg Q \\ \neg Q \Rightarrow R \\ P \Rightarrow \neg S \\ \hline R \vee \neg S \end{array}$$

2. *En cada caso diga si el razonamiento dado es válido o no. Justifique su respuesta.*

$$\begin{array}{l} \exists x \in \mathbb{U} : p(x) \\ \exists x \in \mathbb{U} : q(x) \\ \hline \exists x \in \mathbb{U} : p(x) \wedge q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{U} : R(x) \Rightarrow \neg S(x) \\ \forall x \in \mathbb{U} : T(x) \Rightarrow S(x) \\ \hline \forall x \in \mathbb{U} : T(x) \Rightarrow \neg R(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \\ \neg R \\ \hline \neg Q \Rightarrow \neg P \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C \Rightarrow R \\ \neg(R \vee T) \\ \neg C \Rightarrow T \\ \hline P \end{array} \qquad \begin{array}{l} (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \\ (X \Rightarrow Z) \vee (X \vee Z) \\ (Z \vee Y) \vee (X \wedge \neg Z) \\ \hline X \Leftrightarrow Z \end{array} \qquad \begin{array}{l} C \wedge \neg D \\ C \Rightarrow \neg A \\ D \vee \neg B \\ \hline \neg(A \vee B) \end{array}$$

1.7. Métodos de demostración

La demostración, o prueba, de una proposición consta de una secuencia de afirmaciones, justificadas mediante proposiciones iniciales, el uso de leyes de equivalencia y reglas de inferencia, que tiene como afirmación final a dicha proposición. Es decir, demostrar una proposición consiste en construir un razonamiento válido en que la conclusión sea precisamente la proposición. Los pasos de una demostración se llaman argumentos.

Para el estudio de teorías matemáticas, necesitaremos de principios y equivalencias propias de la teoría.

Definición 1.7.1

i) Un axioma es una proposición que aceptamos como verdadera, sin demostración.

ii) Un teorema es una proposición verdadera que necesita ser demostrada.

iii) Un corolario es una proposición verdadera cuya demostración se infiere directamente de uno o varios teoremas.

En la literatura matemática también aparece el concepto de lema: proposición verdadera que necesita ser demostrada y cuya finalidad principal es ayudar en la demostración de un teorema. También se da un tipo de jerarquía entre las proposiciones que deben ser demostradas: cuando una proposición es importante en general se le llama teorema, si no es tan importante, también puede llamarsele simplemente proposición, o lema si es que su importancia está dada como herramienta para demostrar otras proposiciones.

1.7.1. Método directo

La demostración directa está basada en el método directo de validez de un razonamiento y consiste en:

- Partir de un conjunto inicial de premisas (proposiciones verdaderas). Los axiomas (y tautologías) siempre son considerados premisas y no es necesario que estén dados explícitamente.
- Mediante reglas de inferencia, leyes de equivalencias, definiciones y propiedades ya demostradas, se construyen nuevas proposiciones (también verdaderas) que se anexan al conjunto de premisas.
- Este proceso continúa hasta llegar a la conclusión. De esta forma construimos un razonamiento válido en que la conclusión se obtiene por medio de premisas verdaderas: "la conclusión es consecuencia lógica de las premisas".
- Así, el razonamiento construido es válido y la proposición queda demostrada (Q. D.).

Ejercicios 8

Demostrar $G \vee \neg H$
con las premisas:
$(E \vee F) \Rightarrow \neg H$
$J \Rightarrow E$
$K \Rightarrow F$
$J \vee K$

Demostrar $Q \Leftrightarrow \neg P$
con las premisas:
$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
$S \Rightarrow \neg Q$
$\neg P \vee S$

Demostrar $R \wedge Q$
con las premisas:
$P \vee Q$
$S \Rightarrow (Q \wedge R)$
$P \Rightarrow S$
$Q \Rightarrow S$

Demostrar $(x = 2) \Rightarrow (x = y)$
con las premisas:
$(x \neq y) \Rightarrow (x > y \vee y > x)$
$(x \neq 2) \vee (x = 2)$
$(x > y \vee y > x) \Rightarrow (x \neq 2)$

Demostrar: si $x = 0$, *entonces* $y \neq z$
con premisas
si $x = 0$, *entonces* $x + y = y$
si $y = z$, *entonces* $x + y \neq y$

En general las premisas no suelen ser tan específicas, esto se debe al carácter subjetivo de una demostración que no tiene por qué llevarse a cabo de manera única, ya que podríamos usar premisas distintas y en distinto orden, siempre y cuando usemos adecuadamente las reglas de inferencia.

Basta hojear casi cualquier libro de matemática para encontrarse con demostraciones que no están en forma simbólica; debido a esta costumbre generalizada, en adelante trabajaremos con demostraciones en la forma usual (sin perder la formalidad).

Puesto que requerimos de principios, consideraremos que se conocen las reglas y operaciones generales de la aritmética, además de los siguientes conceptos, de los que se requiere tener presente la interpretación de conectivos y cuantificadores:

Definición 1.7.2 *Sean* a *y* b *números enteros.*

1. *Se dice que* a *divide a* b *siempre que:* $b = ak$ *, para algún entero* k *.*
2. p *es un número primo si los únicos divisores de* p *son:* ± 1 *y* $\pm p$*.*

   Una primera clasificación de los números enteros se da entre pares e impares. Los números que son divisibles por 2 se conocen como números pares, y los números impares, por tanto, son los que no son divisibles por 2. Es decir:

   Se dice que a es par si $a = 2k$, para algún número entero k .

Se dice que b es impar si $b = 2q + 1$, para algún número entero q.

Usaremos estas definiciones junto con las propiedades de la igualdad, de la suma y el producto, de números enteros para construir demostraciones.

Observación 1.7.3 *Una clase de proposiciones que ocurren constantemente en la Matemática son las implicaciones. Para hacer una demostración directa de tales proposiciones recurrimos a su interpretación causa-efecto. Es decir se supone hipotéticamente que el antecedente es verdadero (se pone la causa), y se busca llegar al consecuente (el efecto).*

Ejemplo 15 *Demostrar la proposición*

Si a *divide a* b *y* a *divide a* c *, entonces* a *divide a* $b + c$.

Demostración. *Para demostrar directamente la proposición, partimos de suponer que el antecedente es verdadero (lo incluimos como hipótesis).*

Supóngase que a *divide a* b *y que* a *divide a* c *. Entonces*

1.	a *divide a* b *y* a *divide a* c	*hipótesis*
2.	a *divide a* b	*simplificación*
3.	$b = ak$, *para algún entero* k	*definición*
4.	a *divide a* c	*simplificación de 1.*
5.	$c = aj$, *para algún entero* j	*definición*
6.	$b + c = ak + aj$	*sumando* b *con* c *, de 3 y 5*
7.	$b + c = a(k + j)$	*factorizando (prop. distributiva)*
8.	a *divide a* $b + c$	*definición.*

Por lo tanto, queda demostrado que: si a *divide a* b *y* a *divide a* c *, entonces* a *divide a* $b + c$ *.*

El ejemplo anterior plantea una manera generalizada (no única) para demostrar una proposición de la forma $P \Rightarrow Q$, suponiendo hipotéticamente verdadero el antecedente para, luego de algunos pasos, concluir el consecuente.

Ejercicios 9 *Demostrar directamente las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* a *es par y* b *es par, entonces* $a + b$ *es par.*
2. *Si* a *y* b *son impares, entonces* $a + b$ *es par.*
3. *Si* a *es impar y* b *es impar, entonces* $a \cdot b$ *es impar.*
4. *Si* a *es par y* b *es impar, entonces* $a \cdot b$ *es par.*
5. *Si* a *es par y* b *es impar, entonces* $a + b$ *es impar.*
6. *Si* a *es par y* b *es impar, entonces* $a \cdot b$ *es par.*

7. *Si a es par y b es impar, entonces $a^2 + ab + b^2$ es impar.*

8. *Si z es impar y r es par, entonces $(3z - zr)^2$ es impar.*

Para demostrar proposiciones con otros conectivos, procedemos según su interpretación: para demostrar $P \wedge Q$ demostramos tanto P como Q. Mientras que para demostrar $P \vee Q$ es suficiente demostrar alguna de las afirmaciones. El caso de las proposiciones cuantificadas requiere un trato aparte.

1.7.2. Regla de generalización universal (Gen)

Afirmación 4 *La demostración de la proposición $p(t)$, obtenida de sustituir la variable x por un elemento t de $\mathbb{U}$, seleccionado arbitrariamente, permite concluir válidamente la proposición*

$$\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$$

Dicha afirmación se conoce como Regla de Generalización Universal (Gen).

Ejemplo 16 *Demostrar la proposición*

Todos los números primos mayores que 2 son impares

DEMOSTRACIÓN. *Sea $\mathbb{U}$ el conjunto de los números primos mayores que 2. Haciendo la proposición abierta $p(x) : x$ es impar, la proposición por demostrar tiene la forma $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$. Usaremos Gen para demostrar nuestra proposición. Sea t un elemento arbitrario de $\mathbb{U}$. Procedemos a demostrar $p(t)$.*

1.	$t \in \mathbb{U}$	*arbitrario.*
2.	*t es primo y $t > 2$*	*defnición de $\mathbb{U}$*
3.	$t \neq 2$	*de 2.*
4.	*2 no divide a t*	*definición de número primo*
5.	*t no es par*	*definición de número par*
6.	*t es impar*	

Entonces $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$ *por Gen.*

$\therefore$ *Todos los números primos mayores que 2 son impares.*

Observación 4 *La selección arbitraria de t se refiere a que las propiedades que usamos de t son propiedades que posee cualquier elemento de $\mathbb{U}$.*

Hasta ahora sólo hemos estudiado la demostración directa, sin embargo para aplicar la regla de generalización universal es posible usar otros métodos con los que se demuestre la proposición $p(t)$, dichos métodos también podrán ser usados para demostrar la proposición $\forall x \in \mathbb{U} : P(x)$.

1.7.3. Métodos indirectos

Cuando hecemos demostraciones por el método directo, en ocasiones es muy complicado y en algunos casos se antoja imposible. Por esta razón se han generado métodos alternativos de demostración. Los métodos indirectos para demostrar una proposición P se basan en el método directo para demostrar la afirmación Q de tal forma que, o bien Q sea equivalente a P o bien que, como consecuencia de Q, se pueda inmediatamente deducir P. Hay tres métodos de especial importancia: empezamos por estudiar el que se conoce como método por contradicción.

Método por contradicción (o reducción al absurdo)

Recuérdese que la contradicción C es equivalente a $Q \wedge \neg Q$, con Q una proposición. También, como puede comprobarse, la regla de reducción al absurdo (RAA):

$$(A \Rightarrow B) \Longrightarrow [\,(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A\,]$$

es lógicamente verdadera (tautología).

Para demostrar P por reducción al absurdo (por contradicción), suponemos que P es falsa. Pero como los razonamientos válidos garantizan conclusiones verdaderas sólo de premisas verdaderas, incluimos $\neg P$ como premisa.

1. Inicia el proceso de deducción generalmente partiendo de $\neg P$.
2. El proceso de deducción empieza y continúa hasta que llegamos a una contradicción $Q \wedge \neg Q$.
3. Entonces afirmamos: $\neg P \Rightarrow Q$ y $\neg P \Rightarrow \neg Q$.
4. Luego, al esquema de RAA: $(\neg P \Rightarrow Q) \Longrightarrow ((\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg\neg P)$

   aplicando Modus Ponens, primero con $\neg P \Rightarrow Q$ y luego con $\neg P \Rightarrow \neg Q$, obtenemos
5. $\neg\neg P$
6. Entonces, se concluye P, pues como ya se sabe: $\neg\neg P \equiv P$.

Cuando se llega a la contradicción, paso 2, los siguientes pasos: 3, 4 y 5 son los mismos en cualquier demostración. Es por ello que luego de llegar a una contradicción, se acostumbra pasar directamente a concluir la proposición P (paso 6).

La contradicción buscada no es alguna en particular, sólo diremos que generalmente la contradicción se encuentra al involucrar la información proporcionada con la proposición negada.

Un caso frecuente es cuando la proposición tiene la forma $A \Longrightarrow B$. Tenemos que afirmar la proposición $\neg(A \Longrightarrow B)$, que es equivalente a $A \wedge \neg B$.

Ejemplo 17 *Demostrar: si n y m son enteros impares entonces $n+m$ es par.*

DEMOSTRACIÓN. *Por contradicción, supongamos que la proposición es falsa. Entonces*

1.	*n es impar, m es impar y $n+m$ no es par*	*negación de la implicación*
2.	*n es impar, m es impar y $n+m$ es impar*	*negación de número par*
3.	*n es impar*	*simplificación.*
4.	*$n = 2k+1$ para algún entero k*	*definición, de 3.*

5.	m *es impar*	*simplificación.*
6.	$m = 2p + 1$ *para algún entero* p	*definición, de 5.*
7.	$n + m = (2k + 1) + (2p + 1)$	*sumando, de 4 y 6.*
8.	$n + m = 2k + 2p + 2$	*simplificando.*
9.	$n + m = 2(k + p + 1)$	*factorizando.*
10.	$n + m = 2j$, *con* $j = k + p + 1$	*sustituyendo.*
11.	$n + m$ *par*	*definición de número par.*
12.	*Entonces* $n + m$ *es par y* $n + m$ *es impar*	*de 2 y 11.*

Llegamos a una contradicción.

Por lo tanto: si n *y* m *son enteros impares, entonces* $n + m$ *es par.*

Así, cuando no podemos hacer deducciones con el antecedente de una implicación, se busca hacer deducciones en forma indirecta con el consecuente. Es cuando interviene el método por contradicción, activando como hipótesis la negación del consecuente.

Método por contrarrecíproca

Gracias a la equivalencia

$$P \Longrightarrow Q \;\equiv\; \neg Q \Longrightarrow \neg P$$

en lugar de demostrar la proposición $P \Longrightarrow Q$ podemos demostrar la proposición $\neg Q \Longrightarrow \neg P$, pues aunque ambas proposiciones son implicaciones, algunas veces esta última puede resultar más simple en su demostración.

Ejemplo 18 *Demostrar la proposición: si* n^2 *es par, entonces* n *es par.*

Demostración. *Demostraremos directamente la contrarrecíproca:*

Por demostrar directamente: *si* n *es impar, entonces* n^2 *es impar.*

1.	n *es impar*	*hipótesis*
2.	$n = 2k + 1$, *para algún* $k \in \mathbb{Z}$	*definición de impar*
3.	$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$	*desarrollando el cuadrado*
4.	$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$	*factorizando*
5.	$n^2 = 2m + 1$, *con* $m = (2k^2 + 2k)$	*sustituyendo*
6.	n^2 *es impar*	*definición*

por lo que: si n *es impar, entonces* n^2 *es impar.*

$\therefore$ *Si* n^2 *es par, entonces* n *es par.*

Demostración por casos

Gracias a la equivalencia

$$(P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n) \Longrightarrow Q \equiv (P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q) \wedge \cdots \wedge (P_n \Rightarrow Q)$$

es posible simplificar la demostración de $(P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \Longrightarrow Q$, demostrando cada una de las proposiciones $P_1 \Rightarrow Q$, $P_2 \Rightarrow Q$, $\ldots$, $P_n \Rightarrow Q$. Esto usualmente se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{caso 1} & P_1 \Longrightarrow Q \\ \text{caso 2} & P_2 \Longrightarrow Q \\ \vdots & \\ \text{caso } n & P_n \Longrightarrow Q \end{array}$$

$$\text{por tanto:} \quad (P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n) \Longrightarrow Q.$$

Aun cuando el antecedente no presente visiblemente la forma mencionada, dentro de lo posible es conveniente escribirlo en la forma $P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n$ gracias a propiedades y/o leyes de la teoría.

Recordemos que un número n es divisible por 3 si $n = 3k$ para algún entero k, es decir que: n es divisible por 3 si $\frac{n}{3}$ es un entero.

Con respecto a 3, los números enteros se encuentran divididos en tres clases:

- Los divisibles por 3 (residuo 0), que son de la forma $3k$, con $k \in \mathbb{Z}$

$$\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots ,$$

- Los que al dividir por 3 dejan residuo 1, que son de la forma $3m + 1$, con $m \in \mathbb{Z}$

$$\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots$$

- Los que al dividir por 3 dejan residuo 2, que son de la forma $3q + 2$, con $q \in \mathbb{Z}$

$$\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$$

Todo número entero pertenece a una de las clases anteriores. Por lo que, si n no es divisible por 3, entonces n es de la forma $3k + 1$, o bien, de la forma $3k + 2$, para algún entero K y viceversa. ¿Con respecto a 5 cuántas clases hay?

Ejemplo 19 *Demostrar la proposición*

Si n no es divisible por 3, entonces n^2 no es divisible por 3.

Demostración. *Como vimos antes, si 3 no divide a n, tenemos dos casos posibles: $n = 3k + 1$, o bien que $n = 3k + 2$, para algún entero k.*

Caso I. Por demostrar que: si $n = 3k + 1$, entonces n^2 no es divisible por 3.

1.	$n = 3k + 1$, *para algún entero* k	*hipótesis*
2.	$n^2 = (3k + 1)^2$	*sustituyendo*

3. $n^2 = (3k)^2 + 2(3k)(1) + 1^2$ *desarrollando el cuadrado*

4. $n^2 = (9k^2 + 6k) + 1$ *simplificando y asociando*

5. $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ *factorizando*

6. $n^2 = 3p + 1$, *con* $p = 3k^2 + 2k$ *sustituyendo*

7. n^2 *no es divisible por 3.*

Entonces, si $n = 3k + 1$, *entonces* n^2 *no es divisible por 3.*

Caso II. Por demostrar que: si $n = 3k + 2$, *entonces* n^2 *no es divisible por 3.*

8. $n = 3j + 2$, *para algún entero* j.

9. $n^2 = (3j + 2)^2 = (3j)^2 + 2(3j)(2) + 2^2$ *desarrollando*

10. $n^2 = (9j^2 + 12j) + 4 = (9j^2 + 12j + 3) + 1$ *simplificando y asociando*

11. $n^2 = 3(3j^2 + 4j + 1) + 1$ *factorizando*

12. $n^2 = 3q + 1$, *con* $q = 3j^2 + 4j + 1$ *sustituyendo*

13. n^2 *no es divisible por 3.*

Entonces, si $n = 3k + 2$, *entonces* n^2 *no es divisible por 3.*

Por tanto, de los casos I y II tenemos:

Si n *no es divisible por 3, entonces* n^2 *no es divisible por 3.*

1.7.4. Otros métodos para proposiciones cuantificadas

Cuando el universo $\mathbb{U}$ es finito, dentro de lo posible se recorre cada elemento verificando que se satisface la proposición $p(t)$ en cada elemento t del universo, para concluir $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$. Sin embargo, gracias a la regla de generalización universal, es suficiente demostrar la proposición $p(a)$ eligiendo un elemento arbitrario a de $\mathbb{U}$, sea o no infinito.

Para intentar una prueba por contradicción consideramos la simplificación dada por la afirmación 2:

$$\neg[\,\forall x \in \mathbb{U} : p(x)\,] \;\equiv\; \exists x \in \mathbb{U} : \neg p(x)$$

Ejemplo 20 *Demostrar por contradicción:* $\forall x \in \mathbb{Z} :\ x(x+1)$ *es par.* Demostración. *Partimos de suponer que la proposición es F, por lo que su negación es verdadera.*

1. $\neg\,[\,\forall x \in \mathbb{Z} :\ x(x+1)$ *es par* $]$ *hipótesis.*

2. $\exists x \in \mathbb{Z} :\ x(x+1)$ *es impar* *equivalencia con 1.*

3. $n(n+1)$ *es impar para algún* $n \in \mathbb{Z}$ *definición.*

4. *Ahora procedemos por casos*

Caso 1. n *es par.*

a) $n = 2k$, *para algún entero* k *por defnción de par.*
b) $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(2k^2 + k)$ *sustituyendo y factorizando.*
c) $n(n+1) = 2m$, *con* $m = 2k^2 + k$.
d) $n(n+1)$ *es par* *definición*
Contradicción con 3.

Caso 2. n *es impar.*

a) $n = 2k+1$, *para algún entero* k *por defnción de par.*
b) $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ *factorizando y asociando.*
c) $n(n+1) = 2m$, *con* $m = (2k+1)(k+1)$.
d) $n(n+1)$ *es par* *definición*
Contradicción con 3.

5. *En todos los casos llegamos a una contradicción* $(C \vee C \equiv C)$

Por lo tanto $\forall x \in \mathbb{Z} : x(x+1)$ *es par.*

Por otro lado, para demostrar la proposición $\exists x \in \mathbb{U} : q(x)$ es suficiente garantizar la existencia de un elemento $a \in \mathbb{U}$ tal que $q(a)$. Una forma de garantizarlo es proporcionar el elemento a de $\mathbb{U}$ que satisfaga la proposición $q(a)$. También se puede recurrir a otros métodos para garantizar la existencia de tal elemento, sin tenerlo explícitamente. Por ejemplo, se puede proponer una demostración por contradicción que por la afirmación 2 nos lleva a considerar la equivalencia

$$\neg[\, \exists x \in \mathbb{U} : q(x)\,] \equiv \forall x \in \mathbb{U} : \neg q(x)$$

Contraejemplo

Constantemente hacemos afirmaciones compatibles con el propio sentido común, pero que no necesariamente son verdaderas. El método de "contraejemplo" tiene como objetivo determinar la falsedad de la proposición $\forall x \in \mathbb{U} : p(x)$, mediante el proceso de proporcionar un elemento b de $\mathbb{U}$, tal que la proposición $p(b)$ sea falsa.

Ejemplo 21 *Si la siguiente proposición es verdadera demuéstrela o, en caso contrario, proporcione un contraejemplo.*

Todo número primo es impar

que escribimos como $\forall z \in \mathbb{Z}$: *si* z *es primo, entonces* z *es impar.*

Recuérdese que 2 *satisface la definición de número primo. Como* 2 *es un número primo y es falso que sea impar, entonces es falsa la proposición* $p(z)$: *si* z *es primo, entonces* z *es impar. Por lo tanto la proposición es falsa.*

1.8. Ejercicios

1. Realiza la tabla de verdad de las siguientes proposiciones.

   a) $(r \wedge p) \Rightarrow \neg q]$

   b) $(\neg r \vee p) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow r)]$

   c) $[\neg(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow [(r \wedge p) \Rightarrow \neg q]$

   d) $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)\Big) \implies P$

2. *a)* Dadas las proposiciones lógicas:

      1) Si m es par y n impar, entonces $m+n$ es par o $m+n$ es impar.
      2) Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$.
      3) Si duermo entonces no estudio, entonces no duermo y estudio.

   b) Escribirlas en forma simbólica.

   c) Una vez obtenida la fórmula proposicional, realizar la tabla de verdad.

   d) Diga cuál de ellas es tautología.

3. Una de las siguientes proposiciones es falsa ¿Cuál es?

   a) $(\,23 > 7 \;\vee\; -1 > 0) \implies (0 < -1 \implies 7 < 23)$.

   b) $-23 < 7 \implies -1 < 0$.

   c) $-1 > -2 \implies 7 > 23$.

4. Considerando que $\mathbb{U}$ es el universo de los números enteros $\mathbb{Z}$, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, hallando el elemento apropiado y evaluándolo en la proposición abierta.

   a) $\forall x \in \mathbb{U} : x^2 - 1 = 1 - x^2$

   b) $\exists x \in \mathbb{U} : x^2 - 1 = 1 - x^2$

   c) $\forall x \in \mathbb{U} : x^2 - 1 \neq 1 - x^2$

   d) $\exists x \in \mathbb{U} : x^2 - 1 \neq 1 - x^2$

   e) $\exists y \in \mathbb{U} : y^2 + 1 = 2y + 4$

   f) $\forall z \in \mathbb{U} : z > 2 \implies z^2 - 3z = 0$

5. Determinar si la proposición dada es tautología, contradicción o ninguna de ellas.

   a) $(A \Rightarrow B) \implies [\,(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A]$

   b) $[\,(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \vee q)\,] \implies (\neg p \Rightarrow q)$

   c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\,(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)\,]$

   d) $[\,(P \Leftrightarrow \neg Q) \wedge R\,] \vee [\,(\neg P \Rightarrow R) \wedge Q\,]$

   e) $[\,(p \wedge q) \vee r\,] \Leftrightarrow (p \vee r) \Rightarrow q$

6. Verificar las siguientes equivalencias, las cuales son usadas en los métodos de demostración. Además son usadas para demostrar equivalencias.

a) $\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$ Negación de la implicación.

b) $P \Longrightarrow Q \;\equiv\; \neg Q \Longrightarrow \neg P$ Contrarrecíproca.

7. Mediante leyes, demostrar las siguientes equivalencias, justificando cada paso.

a) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \;\equiv\; (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \;\equiv\; \neg p \vee (q \Rightarrow r)$

c) $\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee \neg r \;\equiv\; \neg r$

d) $(P \Longrightarrow Q) \wedge \neg(R \Longrightarrow Q) \;\equiv\; \neg P \wedge \neg Q \wedge R$

e) $P \vee \neg Q \;\equiv\; Q \Longrightarrow \neg(\neg Q \Leftrightarrow P)$

f) $(P \Longrightarrow Q) \;\equiv\; [(P \wedge \neg Q) \Longrightarrow (R \wedge \neg R)]$

g) $R \wedge [\, Q \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\,] \;\equiv\; R$

8. Escribe la negación simplificada de las siguientes proposiciones

a) $\forall x \in \mathbb{Z} : [(x^2 = 1) \Rightarrow (x^2 + 1 = 2)]$

b) $\forall x \in \mathbb{Z} : [(x^2 < 1) \vee (x^2 + 1 \geq 2)]$

c) $\forall t \in \mathbb{R} : \Big[(t^2 - 1 > 0) \implies (t < -1 \;\vee\; t > 1)\Big]$

d) $P \implies \Big((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)\Big)$

e) $\forall x \in \mathbb{R} : [\, x^2 - 4 > 0 \implies (x > 2 \;\vee\; x < -2)\,]$

f) $\exists x \in \mathbb{Z} : [x \text{ es primo } \wedge\; x \text{ es par}]$

9. *a)* Escribe en forma simbólica cada razonamiento.

1) P_1 Juan hace la página web si Pedro hace la base de datos.
P_2 Roberto hace la base de datos o Juan hace la página web.
P_1 Susana no hace la base de datos si Pedro la hace.
Q Por lo tanto: Roberto hace la base de datos siempre que Susana hace la base de datos.

2) P_1 Si tengo conocimientos de computación y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo.
P_2 Si tengo problemas para encontrar trabajo, entonces tengo más de 40 años o no me preparé lo suficiente.
Q Por lo tanto, si me preparo lo suficiente y no tengo más de 40 años y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo.

3) P_1 Si compro una bicicleta o me levanto más temprano, entonces no llegaré tarde a la escuela.
P_2 Reprobaré el semestre si y sólo si llego tarde a la escuela.
Q Por lo tanto, si llegué tarde a la escuela y reprobé el semestre, entonces no compré una bicicleta o no me levanté temprano.

4) P_1 Si algunos automóviles son veloces y lujosos, entonces son caros.
P_2 Algunos son lujosos y no son veloces.

Q Por lo tanto, si todo automóvil es caro, entonces es veloz o lujoso.

b) Determina si el razonamiento es o no válido.

10. Determina en cada caso si el razonamiento dado es o no válido, sin tablas de verdad.

$$\begin{array}{l} (P \wedge Q) \Rightarrow \neg R \\ R \Rightarrow (S \vee \neg Y) \\ \hline (Y \wedge \neg S \wedge Q) \Rightarrow \neg R \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg P \Rightarrow Q \\ \neg P \\ \hline \neg Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{U}:\ p(x) \Rightarrow q(x) \\ \forall x \in \mathbb{U}:\ p(x) \\ \hline \forall x \in \mathbb{U}:\ q(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (P \wedge \neg Q) \\ (P \wedge \neg Q) \Rightarrow R \\ R \Rightarrow (S \wedge \neg S) \\ \hline P \Rightarrow Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee \neg Q \\ \neg Q \Rightarrow R \\ S \Rightarrow \neg P \\ \hline S \Longrightarrow R \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{U}:\ p(x) \vee q(x) \\ \forall x \in \mathbb{U}:\ [\, p(x) \vee q(x)\,] \Rightarrow r(x) \\ \forall x \in \mathbb{U}:\ r(x) \Rightarrow s(x) \\ \hline \forall x \in \mathbb{U}:\ s(x) \wedge r(x) \end{array}$$

11. En los siguientes desarrollos, las proposiciones P_1, P_2, P_3 y P_4 son premisas.

$P_1.\ a \vee (b \Rightarrow d)$	$P_1.\ \neg P \vee \neg R$	$P_1.\ a \vee (b \Rightarrow d)$	$P_1.\ p \Rightarrow \neg r$
$P_2.\ \neg p \Rightarrow (d \Rightarrow e)$	$P_2.\ S \Rightarrow (P \wedge R)$	$P_2.\ \neg p \Rightarrow (d \Rightarrow e)$	$P_2.\ s \Rightarrow q$
$P_3.\ a \Rightarrow p$	$P_3.\ Q \Rightarrow S$	$P_3.\ a \Rightarrow p$	$P_3.\ \neg q \vee r$
$P_4.\ \neg p$	$P_4.\ Q \vee A$	$P_4.\ \neg p$	$P_4.\ p$
$P_5.\ \neg a$	$P_5.\ \neg(P \wedge R)$	$P_5.\ a$	$P_5.\ \neg r$
$P_6.\ b \Rightarrow d$	$P_6.\ \neg S$	$P_6.\ b \Rightarrow d$	$P_6.\ q$
$P_7.\ d \Rightarrow e$	$P_7.\ \neg\neg Q$	$P_7.\ d \Rightarrow e$	$P_7.\ \neg s$
$P_8.\ b \Rightarrow e$	$P_8.\ A$	$P_8.\ b \Rightarrow e$	$P_8.\ \neg s$

a) Corrige los pasos que sean necesarios en cada caso.

b) Justifica todos los pasos en el desarrollo de cada razonamiento.

12. Para demostrar la proposición

Si $x \cdot y$ es par, entonces x es par o y es par

se procede por contradicción:

a) Indica con cuál de las siguientes afirmaciones inicia la demostración.

1) $x \cdot y$ es impar y x es impar y y es impar.
2) x es impar implica que xy es impar.
3) $x \cdot y$ es par y x es impar y y es impar.
4) x es par y y es par y $x \cdot y$ es impar.

b) Realiza la demostración por contradicción.

13. Demostrar las siguientes proposiciones.

a) Si $n^2 + 1$ es impar, entonces n es par.

Recordar: 3 divide a n significa que $n = 3k$, para algún entero k.

b) Si 3 divide a n, entonces 3 no divide a $2n^2 + 1$.

c) Si 3 divide a n, entonces 3 divide a $2n^2 + 3$.

14. Demostrar las siguientes afirmaciones mediante dos métodos diferentes:

a) Si $x + y \geq 100$, entonces $x \geq 50$ o $y \geq 50$.

b) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 5n - 1$ es impar.

c) Si 5 divide a k, entonces 5 divide a $k^2 - k$.

d) Si n^2 es divisible por tres, entonces n es divisible por 3.

e) Si 3 no divide a m, entonces 3 no divide $3m^2 + 2m + 3$.

Capítulo 2

Conjuntos

2.1. Introducción a conjuntos

A finales del siglo XIX George Cantor propuso su teoría de conjuntos, desarrollada entre 1873 y 1897, provocando un cambio en la forma del pensamiento matemático al encontrarse una serie de inconsistencias en su teoría. En 1908 Ernest Zermelo se dio a la tarea de estudiar la teoría de Cantor, lo que llevó a eliminar las inconsistencias proponiendo el primer sistema axiomático para la teoría de conjuntos.

El estudio axiomático de la teoría de conjuntos está por encima de nuestros objetivos. Partiremos de algunas definiciones básicas sobre conjuntos y sus operaciones para demostrar y obtener propiedades. Iniciamos con la siguientes idea de conjunto:

Un conjunto es una colección bien determinada de objetos

Los objetos son conocidos como elementos del conjunto. Es costumbre denotar con letras mayúsculas como A, B, C, $\ldots$, Z a los conjuntos y usar letras tales como a, b, $\ldots$ x, y, z para los elementos. Que una colección A esté bien determinada significa que una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera.

- x es elemento de A.
- x no es elemento de A.

Es decir que la afirmación: *"a es elemento de A"* es una proposición lógica y, además, parte del lenguaje de la teoría de conjuntos. Simbólicamente escribimos

$$a \in A$$

y su negación como $a \notin A$.

Los objetos que forman un conjunto son distinguibles entre sí; esto es que, dados dos elementos x, y, la afirmación: "$x = y$" es también una proposición lógica.

2.1.1. Dos conjuntos elementales

El conjunto universal

Para determinar conjuntos necesitamos de elementos, los cuales son tomados de un conjunto universal a modo, pues suponer que existe el conjunto de todos los conjuntos nos lleva a contradicciones (una de las inconsistencias de Cantor).

Definición 2.1.1 *El conjunto universal es la colección que contiene a todos los elementos de los conjuntos en cuestión. Usaremos el símbolo* $\mathbb{U}$ *exclusivamente para denotar al conjunto universal.*

Supóngase que se tienen conjuntos con elementos tales como dígitos y vocales. Entonces el universo debe consitir de dígitos y vocales: claro está que el universo puede tener más elementos, pero no menos.

El conjunto vacío

Así como se partió de considerar un universo conteniendo a todos los elementos, también consideramos al conjunto que no tiene elementos.

Definición 2.1.2 *El conjunto vacío es la colección que no tiene elementos. Usaremos el símbolo* ϕ *únicamente para denotar al conjunto vacío.*

Piense en un álbum de fotos sin fotos, conjunto vacío. En este caso el universo consta de los objetos que son fotos.

2.1.2. Determinación de conjuntos

Principalmente tenemos dos formas para determinar conjuntos: por extensión y por comprensión.

Definición 2.1.3

1. *Determinamos un conjunto por extensión al proporcionar la lista completa de sus elementos.*

   Ejemplo: sea X *el conjunto formado por las letras:* a, e, i, o.
   Para determinar claramente el conjunto, usaremos la siguiente notación:

   $$X = \{\, a,\ e,\ i,\ o \,\}$$

   Sólo los objetos que están entre las llaves y separados entre comas, son elementos del conjunto. Las comas " , " se usan para ditinguir los elementos. También, las llaves "{" , "}" son símbolos propios de la teoría de conjuntos, sirven para agrupar a los elementos y se leen como " el conjunto formado por "

   - *El conjunto vacío es determinado por extensión como:*

   $$\phi = \{\quad\}$$

2. *Determinamos un conjunto por comprensión cuando se proporciona la propiedad (proposición abierta* $p(x)$*) que únicamente los elementos del conjunto satisfacen (hacen a* $p(x)$ *verdadera).*

   Ejemplo: sea X *el conjunto determinado por las vocales de nuestro alfabeto.*

   Con ello entendemos que los únicos elementos del conjunto son las letras: a, e, i, o, u. *En tal caso escribimos:*

   $$A = \{x \in \mathbb{U} \,/\, x \ \ \textit{es una vocal}\}$$

   - *El símbolo " / " se lee "tal que".*
   - *Las llaves se leen como "el conjunto formado por todos los elementos"*
   - *También, aparece la proposición abierta "*$p(x):\ x$ *es una vocal".*

- *Únicamente los elementos a que satisfacen $p(a)$ están en el conjunto, y cada elemento del conjunto satisface $p(x)$.*

- $A = \{x \in \mathbb{U} \,/\, x$ *es una vocal*$\}$ *se lee como:*

  A *es el conjunto de los elementos* $x \in \mathbb{U}$ *tales que* x *es una vocal.*
- *Determinamos por comprensión al conjunto vacío como*

$$\phi = \{\, x \in \mathbb{U} \,/\, x \neq x \}$$

  En general, la propiedad que define al conjunto vacío debe ser insatisfacible, siempre falsa (esquema de contradicción).
- *Para determinar el conjunto universo, lo hacemos mediante un esquema de tautología,* $\mathbb{U} = \{\, x \in \mathbb{U} \,/\, T(x) \,\}$, *para asegurar que todos los elementos satisfacen la propiedad.*

Notación híbrida

Cuando la lista es larga, o incluso infinita, se acostumbra una notación híbrida, especificando la secuencia en que se presentan los elementos.

Ejemplos:

1. El conjunto de los números naturales, o enteros positivos es: $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

2. El conjunto $A = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,200\}$ consta de todos los números naturales menores o iguales a 200.

3. Los números enteros son: $\mathbb{Z} = \{\ \ldots,-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

4. Los números pares: $2\mathbb{Z} = \{\ \ldots,-6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$.

En cada caso, se presentan los elementos suficientes que indican la secuencia que se sigue para determinar todos los elementos del conjunto.

2.1.3. Diagramas de Venn

Aunque no sea determinante en la demostración de propiedades, la importancia de tener una idea gráfica de conjuntos radica en dar certidumbre sobre la veracidad de propiedades, así como plantear estrategias de demostración.

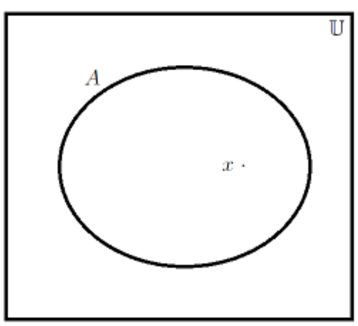


Figura 1.

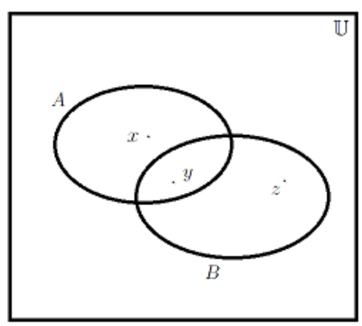


Figura 2.

Gráficamente representamos un conjunto mediante una curva cerrada dentro de un rectángulo, figura 1, que representa el universo; sólo consideramos puntos dentro del universo. Los puntos dentro de la curva son los elementos del conjunto, mientras que los puntos fuera de la curva no pertenecen al conjunto. Los puntos en la frontera no son considerados, pues causarían conflicto sobre su pertenencia al conjunto.

Para representar dos conjuntos mediante diagramas de Venn, figura 2, es necesario considerar todas las formas posibles en que los elementos pueden pertenecer a los conjuntos en cuestión, esto es: debe haber elementos que únicamente estén en A, otros que únicamente estén en B, elementos que estén tanto en A como en B y elementos que no estén ni en A ni en B. Este proceso se generaliza para representar más de dos conjuntos.

Cada vez que sea necesario representar gráficamente conjuntos, lo haremos de manera general a menos que se indiquen propiedades particulares.

Ejercicios 10 *Hacer un diagrama de Venn que represente a tres conjuntos.*

2.1.4. Contensión e igualdad de conjuntos

Definición 2.1.4

1. *Se dice que A es subconjunto de B, y escribimos $A \subseteq B$, si:*

$$\forall x \in A \,:\, x \in B$$

Equivalentemente $\forall x \in \mathbb{U} : [\, x \in A \implies x \in B \,]$.

2. *Se dice que $A = B$ si:*

$$A \subseteq B \quad y \quad B \subseteq A$$

3. *Se dice que A es subconjunto propio de B si: $A \subseteq B$ y $A \neq B$. En tal caso escribimos $A \subset B$.*

Observación 2.1.5

- *A nuestro lenguaje de conjuntos hemos agregado nuevas proposiciones lógicas, simbolizadas por $A \subseteq B$, $A = B$ y $A \subset B$.*
- *Por definición de igualdad, 2.1.4, para determinar un conjunto por extensión no importa el orden ni las veces que aparezca repetido un elemento.*

$$\{-2,\ 1,\ 3,\ 5\,\} = \{1,\ 3,\ -2,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 5\,\} = \{\,1,\ -2,\ 5,\ 3\,\}$$

- *$A \subseteq \mathbb{U}$, para cada conjunto A, por definición de universo.*

Puesto que su justificación no es tan evidente, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1.6 *Sea A un conjunto. Entonces $\phi \subseteq A$.*

Demostración.

Aunque no es una ley, es costumbre hacer demostraciones sobre el conjunto vacío por métodos indirectos, ya que en forma directa no es posible suponer un elemento de ϕ. Por contradicción suponemos que A es un conjunto tal que $\phi \nsubseteq A$. Es decir que $\forall x \in \phi :\ x \in A$ es falsa. Entonces

a) $\exists x \in \phi \,:\, x \notin A$ (negación de $\forall$) hipótesis

Puesto que la proposición existencial es V

b) $t \in \phi \, \wedge \, t \notin A$ para algún elemento t

c) $t \in \phi$ simplificación

d) $t \notin \phi$ definición de conjunto vacío

e) $t \in \phi$ y $t \notin \phi$ Contradicción

Por lo tanto $\phi \subseteq A$.

Debido a la ley conmutativa, la demostración de la propiedad simétrica de la igualdad de conjuntos es inmediata y se deja como ejercicio.

Teorema 2.1.7 *Si* $A = B$, *entonces* $B = A$.

Las siguientes propiedades son de uso común en la teoría de conjuntos, la demostración se deja como ejercicio.

Proposición 2.1.8 *Propiedad transitiva en la igualdad y contención de conjuntos*

1. *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq D$, *entonces* $A \subseteq D$.
2. *Si* $A = B$ *y* $B = D$, *entonces* $A = D$.

2.2. Operaciones de conjuntos

Las operaciones de conjuntos son la base para el álgebra de conjuntos: simplificación vía propiedades, así como demostraciones sobre igualdad de conjuntos.

Definición 2.2.1 *Sean* A , B *conjuntos. Entonces*

1. *La unión de* A *con* B *es el conjunto:*
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{U} \,/\, (x \in A) \, \vee \, (x \in B)\}$$
2. *La intersección de* A *con* B *es el conjunto:*
$$A \cap B = \{x \in \mathbb{U} \,/\, (x \in A) \, \wedge \, (x \in B)\}$$

Como puede observarse, la unión de A con B está ligada a la disyunción puesto que un elemento t de $\mathbb{U}$ está en $A \cup B$ si y sólo si satisface la propiedad $p(t):\ (t \in A) \, \vee \, (t \in B)$. Análogamente la intersección de A con B está ligada a la conjunción puesto que un elemento t está en $A \cap B$ si y sólo si satisface la propiedad $q(t):\ (t \in A) \, \wedge \, (t \in B)$.

En la siguiente figura se tienen dos diagramas de Venn, el de la izquierda representa la unión, mientras que el de la derecha representa la intersección (parte sombreada).

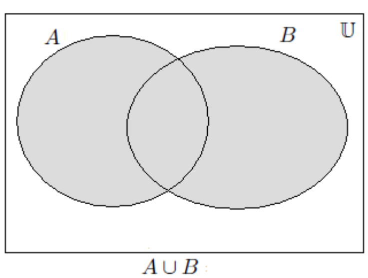


Figura 3

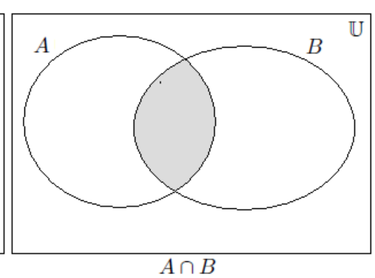


Figura 4

Teorema 2.2.2

1. $A \cap B \subseteq A$

2. $A \subseteq A \cup B$

3. *Si* $A \subseteq B$*, entonces* $A \cap B = A$ *y* $A \cup B = B$.

Demostración. Las figuras 3 y 4 nos servirán de guía.

1. Demostraremos directamente la proposición $\forall x \in A \cap B : x \in A$, mediante Gen, proponiendo un elemento arbitrario en $A \cap B$ (figura 4).

   a) $a \in A \cap B$ arbitrario

   b) $(a \in A) \wedge (a \in B)$ definición de intersección, 2.2.1

   c) $a \in A$ simplificación

   d) $\forall x \in A \cap B : x \in A$ por Gen

   $\therefore$ $A \cap B \subseteq A$

2. Demostraremos directamente la proposición $\forall x \in A : x \in A \cup B$, mediante la regla Gen, proponiendo un elemento arbitrario en A (figura 3).

   a) $t \in A$ arbitrario

   b) $(t \in A) \vee (t \in B)$ adición

   c) $t \in A \cup B$ definición de unión, 2.2.1

   d) $\forall x \in A : x \in A \cup B$ por Gen

   $\therefore$ $A \subseteq A \cup B$

3. Demostración directa (¿Cómo es el diagrama de Venn que satisface $A \subseteq B$?)

   $A \subseteq B$ hipótesis

   Para determinar $\forall x \in A : x \in A \cap B$, lo hacemos mediante Gen.

   a) $a \in A$ arbitrario

   b) $a \in B$ por hipótesis

   c) $(a \in A) \wedge (a \in B)$ adjunción

   d) $\forall x \in A : x \in A \cap B$ Gen

   Entonces $A \subseteq A \cap B$ por definición.

   La afirmación $A \cap B \subseteq A$ ya se demostró en 1.

   $\therefore$ $A \cap B = A$ pues $A \subseteq A \cap B$ y $A \cap B \subseteq A$.

   Ahora queremos demostrar que $A \cup B = B$.

   e) $t \in A \cup B$ arbitrario

   f) $(t \in A) \vee (t \in B)$ definición

   g) $(t \in B) \vee (t \in B)$ por hipótesis ($A \subseteq B$)

   h) $t \in B$ Idempotencia

   i) $\forall x \in A \cup B : x \in B$ Gen

Entonces $A \cup B \subseteq B$ por definición.

La afirmación $B \subseteq A \cup B$ ya se demostró en 2.

$\therefore\ A \cup B = B$.

La forma inicial para demostrar $X = Y$ se basa en la definición. Esto es, debemos demostrar $X \subseteq Y$ $(\forall x \in X : x \in Y)$ y luego $Y \subseteq X$ $(\forall y \in Y : y \in X))$. Este método se conoce como **demostración por contenciones.**

Se deja como ejercicio la demostración del siguiente corolario, observando que las demostraciones pueden ser de dos maneras: la primera por contenciones y la segunda por propiedades, ahorrándose pasos usando los teoremas 2.1.6 y 2.2.2. Se recomienda trabajar con ambas formas de demostración.

Corolario 2.2.3

1. $A \cap \mathbb{U} = A$ *y* $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$
2. $A \cap A = A$ *y* $A \cup A = A$
3. $\phi \cap A = \phi$ *y* $\phi \cup A = A$.

Definición 2.2.4 *Sean* A , B *conjuntos.*

1. *El complemento de* A *es el conjunto* A^C *determinado por*

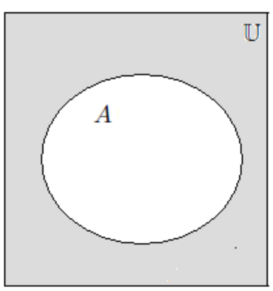
$$A^C = \{x \in \mathbb{U} \,/\, x \notin A\}$$

2. *La diferencia de* B *con* A*, tambien conocido como complemento relativo de* A *con respecto a* B*, es el conjunto*

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{U} \,/\, (x \in B) \ \wedge \ (x \notin A)\}$$

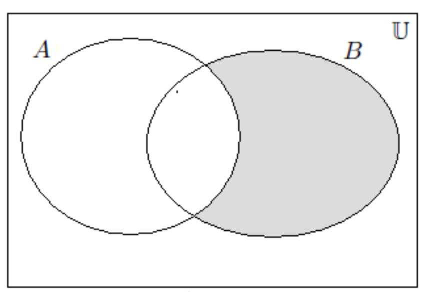
Observemos que el complemento de A está ligado a la negación, pues para pertenecer a A^C la propiedad que debe satisfacerse es $r(x) : x \notin A$, que es precisamente la negación de $x \in A$. En el caso de la diferencia, se agrega la restricción $x \in B$.

En la siguiente figura se representan en forma general el complemento y la diferencia de conjuntos mediante diagramas de Venn.



A^c

Figura 5



$B \setminus A$

Figura 6

El siguiente teorema tiene mención especial debido al uso práctico que se le da en el álgebra de conjuntos.

Teorema 2.2.5 (Diferencia) $B \setminus A = B \cap A^C$.

Demostración. Por contenciones, figura 6.

$\subseteq$) $t \in B \setminus A$ arbitrario

1. $t \in B \ \wedge \ t \notin A$ definición

2. $t \in B \ \wedge \ t \in A^{C}$ definición de complemento (ver figura 5)

3. $t \in B \cap A^{C}$ definición de intersección, 2.2.1

4. $\forall x \in B \setminus A : x \in B \cap A^{C}$ Gen

Entonces $B \setminus A \subseteq B \cap A^{C}$.

$\supseteq$) Sea $t \in B \cap A^{C}$, arbitrario

5. $t \in B \ \wedge \ t \in A^{C}$ definición de intersección, 2.2.1

6. $t \in B \ \wedge \ t \notin A$ definición de complemento

7. $t \in B \setminus A$ definición de diferencia

8. $\forall x \in B \cap A^{C} : x \in B \setminus A$ Gen

Entonces $B \cap A^{C} \subseteq B \setminus A$.

$\therefore \ B \setminus A = B \cap A^{C}$.

La demostración del siguiente teorema puede hacerse por contenciones, usando propiedades ya demostradas y tomando como guía los diagramas de Venn. Se deja como ejercicio al lector.

Teorema 2.2.6 *Sean A, B conjuntos. Entonces*

1. $(A^{c})^{C} = A$

2. $A \cup A^{C} = \mathbb{U}$ *y* $A \cap A^{C} = \phi$

3. $\mathbb{U}^{C} = \phi$ *y* $\phi^{C} = \mathbb{U}$

Ejercicios 11 *Demostrar la proposición*

$$(A \cap B = \phi) \implies B \subseteq A^{C}$$

Haremos una demostración directa. Puesto que se trata de una implicación, la interpretaremos como un fenómeno causa-efecto. Nos apoyaremos con un diagrama de Venn (figura 7) ilustrando el antecedente (la causa) y observando que en el diagrama se satisface el consecuente (efecto).

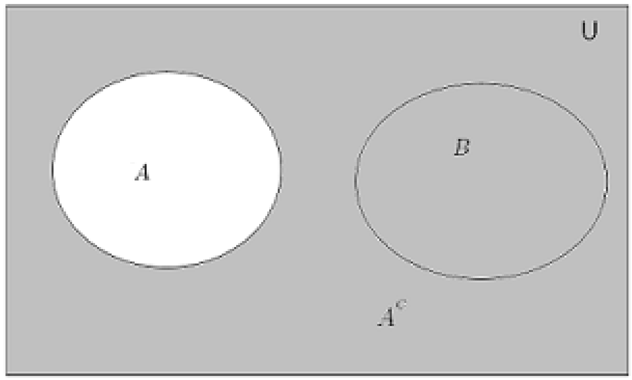


Figura 7: $A \cap B = \phi$

$A \cap B = \phi$ *hipótesis*

Para demostrar $B \subseteq A^C$ *lo hacemos con Gen.*

$t \in B$ *arbitrario*

$t \notin A$ *hipótesis*

$t \in A^C$ *definición de complemento, 2.2.4*

$\forall x \in B : x \in A^C$ *Gen*

Entonces $B \subseteq A^C$

$\therefore \quad (A \cap B = \phi) \implies B \subseteq A^C.$

A partir de las definiciones anteriores y de sus negaciones, tenemos las siguientes observaciones que podemos usar en el proceso de alguna demostración (en ambos sentidos).

Observación 2.2.7

1. $x \in A \cup B$ *si y sólo si* $(x \in A) \vee (x \in B)$

   $x \notin A \cup B$ *si y sólo si* $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$

2. $x \in A \cap B$ *si y sólo si* $(x \in A) \wedge (x \in B)$

   $x \notin A \cap B$ *si y sólo si* $(x \notin A) \vee (x \notin B)$

3. $x \in A^c$ *si y sólo si* $x \notin A$

   $x \notin A^C$ *si y sólo si* $x \in A$

4. $x \in A \setminus B$ *si y sólo si* $(x \in A) \wedge (x \notin B)$

   $x \notin A \setminus B$ *si y sólo si* $(x \notin A) \vee (x \in B)$.

Propiedades de las operaciones

Las siguientes propiedades son de gran utilidad en el álgebra de conjuntos. Se deja como ejercicio su demostración.

Teorema 2.2.8 *Sean* X , Y *conjuntos. Entonces*

1. *Propiedad conmutativa*
   - $X \cup Y = Y \cup X$.
   - $X \cap Y = Y \cap X$.
2. *Propiedad asociativa*
   - $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$.
   - $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.
3. *Propiedad distributiva*
   - $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
   - $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.
4. *Leyes de De Morgan*
   - $[X \cap Y]^C = X^C \cup Y^C$.
   - $[X \cup Y]^C = X^C \cap Y^C$.

2.3. Álgebra de conjuntos

El objetivo en esta sección es transformar conjuntos compuestos mediante operaciones, con dos o más conjuntos, en conjuntos expresados en forma más simple. Por ello, el teorema 2.2.8 se convierte en un referente importante que nos permite demostrar igualdades entre conjuntos a partir de la aplicación de, una o más veces, algunas de sus propiedades y teoremas.

Demostrar una igualdad de conjuntos por propiedades, es un proceso análogo al de justificar equivalencias mediante leyes, consiste en una secuencia de igualdades que inicia con uno de los miembros de la igualdad y termina con el otro. Los pasos se justifican mediante la aplicación de operaciones y propiedades de conjuntos.

Ejemplo 22

1. *Demostrar que* $A \smallsetminus (B \cap D) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus D)$.

   Demostración.

   En general, es recomendable iniciar por la parte más compleja de la igualdad.

$$\begin{aligned}
(A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus D) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap D^c) && \textit{diferencia, teo. 2.2.5} \\
&= A \cap (B^C \cup D^C) && \textit{distributiva} \\
&= A \cap (B \cap D)^C && \textit{De Morgan} \\
&= A \smallsetminus (B \cap D) && \textit{diferencia, teo. 2.2.5}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto la igualdad queda demostrada.

2. *Demostrar* $A \subseteq B \implies A \cup (B \setminus A) = B$.

   Demostración.

   Por demostración directa suponemos como hipótesis que $A \subseteq B$, *luego procedemos a demostrar la igualdad de conjuntos por propiedades. En algún paso utilizaremos la hipótesis.*

   a) $A \subseteq B$ *hipótesis*

   Partimos del miembro izquierdo de la igualdad

   b) $A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap A^C)$ *diferencia, teo. 2.2.5*

   c) $= (A \cup B) \cap (A \cup A^C)$ *distributiva*

   d) $= (A \cup B) \cap \mathbb{U}$ *teo 2.2.6*

   e) $= A \cup B$ *corolario 2.2.3*

   f) $= B$ *hipótesis y teo. 2.2.2-3*

   Entonces $A \cup (B \setminus A) = B$

   $\therefore \quad A \subseteq B \implies A \cup (B \setminus A) = B$.

   La igualdad también puede ser demostrada por contenciones, la dejamos como ejercicio.

Resta hablar de una característica que en general tienen los conjuntos.

Definición 2.3.1 *Sea* A *un conjunto. La cardinalidad de* A*, denotada por* $|A|$*, es el número de elementos (distintos) que tiene* A.

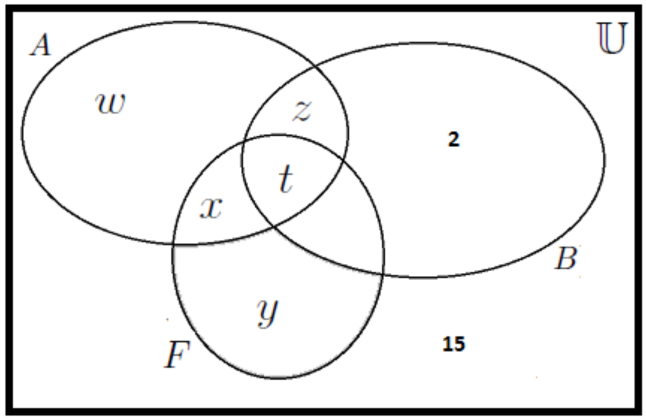
Decimos que un conjunto es infinito cuando posee una cantidad infinita de elementos, y decimos que es finito en otro caso.

Ejemplo 23 *En la Facultad de Computación se realizó una encuesta a 100 estudiantes, sobre el deporte de su preferencia: Futbol, Basquetbol, Atletismo. Se recopiló la siguiente información:*

- *15 alumnos prefieren otros deportes.*
- *20 alumnos prefieren jugar futbol, pero no basquetbol.*
- *35 alumnos prefieren basquetbol y atletismo.*
- *60 alumnos prefieren no jugar basquetbol.*
- *30 alumnos prefieren atletismo, pero no juegan futbol.*
- *34 alumnos prefieren jugar futbol y atletismo.*
- *2 alumnos prefieren jugar sólo basquetbol.*

1. *Hacer un diagrama adecuado a la situación planteada.*
2. *¿Cuántos alumnos encuestados juegan los tres deportes?*
3. *¿Cuántos alumnos encuestados juegan sólo basquetbol y futbol?*

Solución



Con base en el diagrama de arriba, tenemos las siguientes ecuaciones determinadas por la información proporcionada:

1. $x + y = 20$

2. $z + t = 35$

3. $w + z = 30$

4. $x + t = 34$

5. $w + x + y + 15 = 60$, es decir que $w + x + y = 45$

   De las ecuaciones 1 y 5 tenemos: $w = 45 - 20$, es decir que $w = 25$.

   Sustituyendo $w = 25$ en la ecuación 3, tenemos $z = 5$

2. Sustituyendo $z = 5$ en la ecuación 2, tenemos $t = 30$. Por lo que afirmamos que el total de alumnos que practican los tres deportes es 30.

   Sustituyendo $t = 30$ en la ecuación 4, tenemos $x = 4$.

   Sustituyendo $x = 4$ en la ecuación 1, tenemos $y = 16$.

3. El total de alumnos contabilizados hasta el momento es:

$$x + y + z + t + w + 15 + 2 = 4 + 16 + 5 + 30 + 25 + 15 + 2 = 97$$

   Por lo que el total de alumnos que sólo juegan basquetbol y futbol es: 3.

2.4. Otros conjuntos

Ahora nos detenemos para analizar la naturaleza de los elementos.

2.4.1. Conjunto potencia

Los elementos que forman un conjunto también pueden ser conjuntos. Por ejemplo

$$\mathcal{A} = \{\, 2,\ \{\, 3,\ 1 \,\},\ \{\, 2 \,\} \,\}$$

que tiene como elementos a: 2, $\{\, 3,\ 1 \,\}$ y $\{\, 2 \,\}$. Entonces $2 \in \mathcal{A}$, $\{\, 3,\ 1 \,\} \in \mathcal{A}$ y $\{\, 2 \,\} \in \mathcal{A}$.

Observar que: $\{\, 2 \,\} \in \mathcal{A}$, pues forma parte de la colección. También $\{\, 2 \,\} \subseteq \mathcal{A}$, pues todo elemento del conjunto $\{\, 2 \,\}$ es elemento de $\mathcal{A}$.

Para evitar confusión, al hablar de este tipo de colecciones nos referiremos a ellas como "Familia de conjuntos" o simplemente "Familia".

Definición 2.4.1 *Sea A un conjunto. El conjunto potencia de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, es la familia formada por todos los subconjuntos de A.*

Ejemplo 24 *Sean $A = \{\, 1,\ 2,\ 3 \,\}$ y $B = \{\, 1,\ 3,\ 4 \,\}$. Entonces*

- $\mathcal{P}(A) = \Big\{\ \phi,\ \{\, 1 \,\},\ \{\, 2 \,\},\ \{\, 3 \,\},\ \{\, 1,\ 2 \},\ \{\, 1,\ 3 \},\ \{\, 2,\ 3 \},\ \{\, 1,\ 2,\ 3 \,\} \Big\}$
- $\mathcal{P}(B) = \Big\{\ \phi,\ \{\, 1 \,\},\ \{\, 3 \,\},\ \{\, 4 \,\},\ \{\, 1,\ 3 \},\ \{\, 1,\ 4 \},\ \{\, 3,\ 4 \},\ \{\, 1,\ 3,\ 4 \,\} \Big\}$
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \Big\{\ \phi,\ \{\, 1 \,\}, \{\, 3 \,\},\ \{\, 1,\ 3 \} \Big\}$
- $\mathcal{P}(B) \smallsetminus \mathcal{P}(A) = \Big\{\ \{\, 4 \,\},\ \{\, 1,\ 4 \},\ \{\, 3,\ 4 \},\ \{\, 1,\ 3,\ 4 \,\} \Big\}$

En este caso $|\mathcal{P}(A)| = 8$. ¿Cuál es la cardinalidad de $\mathcal{P}(D)$, si $|D| = 4$?

2.4.2. Producto cartesiano

Ahora nos toca hablar sobre parejas ordenadas, que podemos interpretar como binas en las que sí importa el orden.

Definición 2.4.2 *Una pareja ordenada es una dupla $(a,\ b)$, tal que*

$$(a,\ b) = (x,\ z) \quad \textit{si y sólo si} \quad a = x \ \ y \ \ b = z.$$

Claramente, de la definición, $(3,\ 1) \neq (1,\ 3)$.

La misma definición puede generalizarse para n-uplas, con el siguiente criterio: $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ si y sólo si $a_i = b_i$, con $i = 1, \ldots,\ n$.

Definición 2.4.3 *Sean A, B conjuntos. El producto cartesiano entre A y B es el conjunto determinado por:*

$$A \times B = \{\, (a,b) \,/\, (a \in A)\ \wedge\ (b \in B) \}$$

Ejemplo 25 *Sean $A = \{\, 1,\ 2 \,\}$ y $B = \{\, 1,\ 3 \,\}$. Entonces*

$$A \times B = \{\, (1,\ 1),\ \ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3) \,\}$$

Sean $\mathcal{D} = \{\, (1,\ 3),\ (2,\ 3) \,\}$ y $\mathcal{F} = \{\, (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1) \,\}$. Entonces

1. $\mathcal{D} \subseteq A \times B$

2. $\mathcal{F} \nsubseteq A \times B$

3. $\mathcal{D} \cap \mathcal{F} = \{ (2,\ 3) \}$

4. $\mathcal{F} \smallsetminus \mathcal{D} = \{ (2,\ 1),\ (3,\ 1) \}$

5. $A \times B \neq B \times A$.

Ejercicios 12 *Sean* A, B *conjuntos.*

1. *Demostrar la siguiente afirmación*

   Si $A \neq \phi$ *y* $B \neq \phi$, *entonces* $A \times B \neq \phi$.

2. *Demostrar indirectamente las siguientes afirmaciones*

   a) *Si* $A = \phi$ *ó* $B = \phi$, *entonces* $A \times B = \phi$.
   b) $A \times B = \phi \Longrightarrow A = \phi$ *ó* $B = \phi$.

2.5. Relaciones y funciones

Definición 2.5.1 *Sean* A, B *conjuntos. Se dice que* $\mathcal{R}$ *es una relación de* A *en* B *si*

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Ejemplo 26 *Sean* $A = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 10\}$ *y* $B = \{-10,\ -9,\ -8,\ \ldots,\ 8,\ 9,\ 10\}$. *Las siguientes son relaciones de* A *en* B.

1. $\mathcal{R} = \{ (1,\ 3),\ (2,\ 10) \}$

2. $\mathcal{R} = \{ (1,\ 3),\ (2,\ -10),\ (3,\ -10),\ (5,\ 10) \}$

3. $\mathcal{R} = \{ (0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 9),\ (0,\ 5) \}$

4. $\mathcal{R} = \{ (x,\ y) \in A \times B \ /\ x = y^2 \} =$

5. $\mathcal{R} = \{ (x,\ y) \in A \times B \ /\ y = x^2 \} = \{ (0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 9) \}$

6. $\mathcal{R} = \{ (x,\ y) \in A \times B \ /\ y^2 = x^2 \}$

Si $(a,\ b) \in \mathcal{R}$, decimos que a está relacionado con b y escribimos $a\mathcal{R}b$. En el ejemplo 6 tenemos que: $2\mathcal{R}$-2 y $2\mathcal{R}\,2$

Observación 2.5.2 *Sea* $\mathcal{R}$ *una relación de* A *en* B.

- *El conjunto* A *se conoce como conjunto de salida, mientras que* B *es el conjunto de llegada.*

- *Representamos la relación* $\mathcal{R}$ *como* $\mathcal{R} : A \longrightarrow B$. *Con ello se indica el conjunto de partida y el conjunto de llegada.*

- *En forma general, no todo elemento* (a, b) *pertenece a* $\mathcal{R}$. *Esto tiene una interpretación paralela con los elementos de* A *y los elementos de* B.

Definición 2.5.3

1. *Los elementos de* A *que sí están relacionados con algún elemento de* B *forman el Dominio de la relación.*

2. *Los elementos* b *de* B *para los que sí existe un elemento* a *de* A *tal que* $a\mathcal{R}b$, *forman la Imagen de* $\mathcal{R}$.

Las funciones son una clase particular de relaciones, motivo de estudio en distintas áreas de la Matemática.

Definición 2.5.4 *Sean* A, B *conjuntos. Una función* f *de* A *en* B *es una relación en* $A \times B$ *que satisface la siguiente condición:*

$$afb_1 \ \ y \ \ afb_2 \iff b_1 = b_2$$

De la definición, si f es una función:

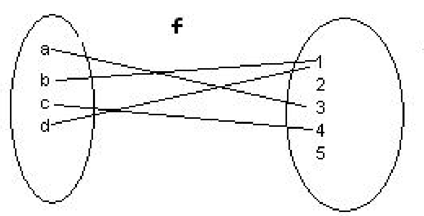
$$(a\ ,\ b_1),\ (a\ ,\ b_2) \in f \implies b_1 = b_2.$$

En el ejemplo 26, son funciones las dadas por 1, 2 y 5, mientras que las relaciones 3, 4 y 6 no son funciones (¿por qué?).

Si f es una función de A en B, escribimos $f : A \longrightarrow B$. En general, el Dominio de f lo escribimos como $Dom(f)$ (subconjunto de A) y el Codominio de f es $Im(f)$ (subconjunto de B).

Representación gráfica de funciones

Gráficamente representamos una función dibujando los conjuntos A, B e interlazando el único elemento del conjunto B que está relacionado con un elemento dado de A. La siguiente gráfica representa la función $f = \{\ (a,\ 2),\ (b,\ 1),\ (c,\ 3),\ (d,\ 2)\}$:



Puesto que a cada elemento del dominio le corresponde sólo un elemento de la imagen, es costumbre escribir $f(a) = b$ para indicar que $(a,\ b) \in f$. En el caso del diagrama anterior, tenemos: $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 3$ y $f(d) = 2$.

En conjuntos con muchos o infinitos elementos, se acostumbra hacer referencia a una función indicando la forma en que están relacionados sus elementos. Por ejemplo la función

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{es tal que}$$

$$f(x) = 3x^2 + 1$$

nos indica que f es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, tal que cada elemento $a \in \mathbb{N}$ está relacionado con el elemento b, obtenido al sustituir x por a, de la forma $b = 3a^2 + 1$ (evaluando en a).

Así, $f(3) = 3(3^2) + 1 = 28$ y $f(5) = 3(5)^2 + 1 = 75 + 1 = 76$.

2.6. Ejercicios

1. Sean $\mathbb{U} = \{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

   $A = \{-2,\ -1,\ 1,\ 4\},\ B = \{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$ y $C = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Encontrar los siguientes conjuntos:

   a) $(A \cup B)^C =$

   b) $(A \cap B)^C =$

   c) $A \cap (B \cup D) =$

   d) $A \cup (B \cap D) =$

   e) $A^c \cap B^C =$

   f) $A^c \cup B^C =$

   g) $(A \cap B) \cup (A \cap D) =$

   h) $(A \cup B) \cap (A \cup D) =$

   i) $\left[A \cup (B \setminus D)^C \right]^C =$

2. Determinar $\mathbb{U}$ y los conjuntos $A,\ B$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones.

   i) $3 \in A$ y $3 \notin B$

   ii) $(A^C \cup B^C) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7\}$

   iii) $A \cup B = \{1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$

   iv) $A \cap B^C = \{1,\ 3\}$

3. Sean los conjuntos $\mathbb{U} = \{a, r, s, e, n, i, c, o\},\ A = \{n, e, c, i, a\},\ B = \{i, r, a, n\}$ y $D = \{r, e, n, o\}$.

   a) Encontrar $(A^C \setminus B)^C \setminus D$.

   b) Expresar el conjunto $\{e,\ c,\ o\}$ como resultado de operaciones entre $A,\ B$ y D.

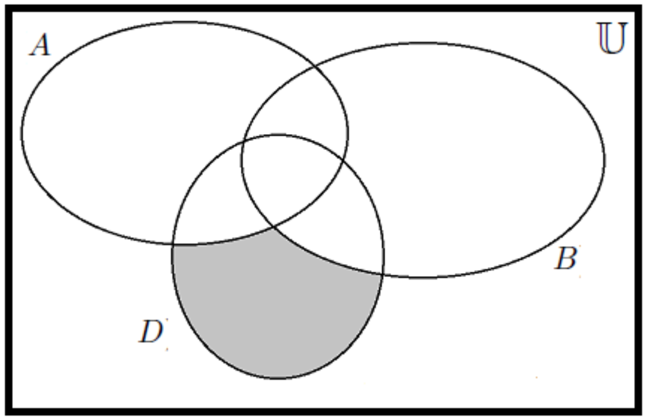
4. Demostrar las siguientes propiedades:

   a) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq D$, entonces $A \subseteq D$.

   b) Si $A = B$, entonces $B = A$.

   c) Si $A = B$ y $B = D$, entonces $A = D$.

5. Empleando operaciones de conjuntos, expresa el conjunto correspondiente a la parte sombreada del siguiente diagrama.



6. Demostrar las siguientes afirmaciones.

   a) Si $A \cap B = \phi$, entonces $A \subseteq B^c$.
   b) Si $A \subseteq B^c$, entonces $A \cap B = \phi$.
   c) Si $A \cap B^c = A$, entonces $B \subseteq A^c$.
   d) Si $X \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq X^c$.
   e) $A \cap B = \phi$ si y sólo si $(A \subseteq B^c \wedge B \subseteq A^c)$.
   f) $X \setminus B \subseteq B^c$.
   g) Si $A \cap B = B$, entonces $A \cup B = A$ y $B \subseteq A$.
   h) Si $A \cup B = A$, entonces $A \cap B = B$ y $B \subseteq A$.
   i) $X \cup Y = X \cap Y \iff X = Y$.
   j) $(X \setminus Y) \cup Y = X \iff Y \subseteq X$.
   k) $A \subseteq Y \implies A \cup X \subseteq Y \cup X$.
   l) $A \subseteq B \implies A \cap Y \subseteq B \cap Y$.
   m) Si $A \cup B \neq \phi$, entonces $(A \neq \phi \vee B \neq \phi)$.
   n) $(A \setminus B) = \phi \implies A \subseteq B$.
   ñ) $[\,(A \cup B) \subseteq (A \cup D) \wedge (A \cap B) \subseteq (A \cap D)\,] \implies B \subseteq D$.
   Sugerencia: considere el esquema de tautología $t \in A \vee t \notin A$

7. Demostrar, mediante propiedades, las siguientes afirmaciones.

   a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

   b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$

   c) $E^c \setminus F^c = F \setminus E$

   d) $(X \setminus A) \cap A = \phi$

   e) $A \cap (B \setminus D) = (A \cap B) \setminus D$

f) $A \cap (B \smallsetminus D) = (A \cap B) \smallsetminus (A \cap D)$

g) $A \smallsetminus B = A \smallsetminus (A \cap B)$

h) $A \smallsetminus (B \cup D) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus D)$

i) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

j) $(A \cup B) = (A \smallsetminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \smallsetminus A)$

k) $\Big[\Big(B \smallsetminus A^C \Big) \cup (B \smallsetminus A)\Big] \smallsetminus [\, B \smallsetminus (\, B \smallsetminus A\,)\,] = B \smallsetminus A$

l) $\big[A \smallsetminus (B \cap A^C)\big] \cap [(B \smallsetminus A) \cap A] = A$

m) $(A^C \smallsetminus B)^C \cap B = B$

n) $B \smallsetminus \Big(A \smallsetminus D^C\Big) = (B \smallsetminus A) \cup (B \smallsetminus D)$

ñ) $\Big[\, B^C \cup (\, A \smallsetminus B\,)^C \,\Big] \cap B = B$

o) $\Big[\Big(B \smallsetminus A^C \Big) \cup (B \smallsetminus A)\Big] \smallsetminus [\, B \smallsetminus (\, B \smallsetminus A\,)\,] = B \smallsetminus A$

p) $\left[\Big(A \smallsetminus B^C \Big)^C \smallsetminus \Big(A^C \cap B \Big) \right] \cap A = A \cap B^C$

q) $A \cap \Big[\, (\, A \cup B)^C \cup \Big(B^C \cup A \Big) \,\Big] = A$

8. Si la afirmación es verdadera demuéstrala, o proporciona un contraejemplo en caso contrario.

   a) $(B \smallsetminus A) \smallsetminus D = B \smallsetminus (A \smallsetminus D)$

   b) $(B \smallsetminus A) \smallsetminus D = B \smallsetminus (A \cap D)$

   c) $(B \smallsetminus A) \smallsetminus D = B \smallsetminus (A \cup D)$

   d) $A \cap B = A \cap D \implies A = D$

   e) $A \cup B = A \cup D \implies A = D$

9. Demostrar las siguientes afirmaciones

   a) $A \subseteq A \cup B$ y $A \cap B \subseteq A$

   b) $A \cup B = B \iff A \subseteq B$

   c) $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$

   d) $A \subseteq B \implies A \cup (B \smallsetminus A) = B$

   e) $B \subseteq A \implies B^C \cup \big[(A \cup B^C) \cup A\big]^C = B^C$

10. Considere el siguiente problema: en una encuesta a 200 estudiantes se halló que:

    - 68 se comportan bien.
    - 138 son inteligentes.

- 160 son habladores.
- 120 son habladores e inteligentes.
- 20 estudiantes se comportan bien y no son inteligentes.
- 13 se comportan bien y no son habladores.
- 15 se comportan bien y son habladores, pero no son inteligentes.

¿Cuántos de los 200 estudiantes entrevistados no se comportan bien, son habladores y no son inteligentes?

11. En la Facultad de Ciencias de la Computación se realizó una promoción de suscripción a tres importantes revistas: “Bases de datos”, “Ingeniería de Software” y “Telecomunicaciones”. Se registró la siguiente información:

- 8 estudiantes se suscribieron a “Ingeniería de Software” y “Telecomunicaciones”.
- 6 estudiantes se suscribieron a “Bases de datos” y “Telecomunicaciones”.
- 10 estudiantes se suscribieron a “Bases de datos” y “Ingeniería de Software”.
- Sólo 2 estudiantes, de los 70 encuestados, se suscribieron a las tres revistas.
- 20 estudiantes se inscribieron sólo a una de las tres revistas.
- 3 estudiantes se inscribieron sólo a “Telecomunicaciones”.
- 40 estudiantes no se inscribieron a “Ingeniería de Software”.

a) Haga un diagrama adecuado a la situación planteada.

b) ¿Cuántos estudiantes estarán suscritos sólo a “Ingeniería de Software”?

c) ¿Cuántos estudiantes, de los encuestados, no se suscribieron a ninguna revista?

12. Se dispone de la siguiente información correspondiente a los 75 empleados de las dos sucursales de la empresa “FCC.com”:

- Todas las mujeres tienen menos de 10 años de servicio.
- Hay 45 hombres en total.
- Hay 25 empleados con 10 o más años de servicio.
- 20 hombres trabajan en el departamento de Informática.
- Hay 20 empleados en el departamento de Informática con menos de 10 años de servicio, de los cuales 5 son mujeres.

Determinar:

a) ¿Cuántos hombres con 10 o más años de servicio trabajan en el departamento de Informática?

b) ¿Cuántos empleados trabajan en el departamento de Informática?

c) ¿Cuántos empleados tienen menos de 10 años de servicio?

13. En una encuesta a 60 alumnos, se encontró la siguiente información.

A 25 alumnos les gusta la materia de Matemáticas, a 26 les gusta la materia de Programación y a 23 les gusta la materia de Hardware. A 9 les gustan tanto Matemáticas como Programación, a 8 les gustan Programación y Hardware. Hay 7 alumnos que les gusta Matemáticas pero no Hardware. A 3 alumnos les gustan las tres materias.

a) ¿A cuántos alumnos les gusta únicamente Hardware?

b) ¿A cuántos alumnos no les gustan Matemáticas ni Programación ni Hardware?

14. Sean $A = \{-2,\ -1,\ 1,\ 4\}$, $B = \{\ -1,\ 1,\ 2\ \}$ y $D = \{-2,\ 3,\ 4,\ \}$. Encontrar los siguientes conjuntos:

a) $A \times B =$

b) $D \times B =$

c) $(A \times B) \cap (A \times D) =$

d) $(A \times B) \cup (A \times D) =$

e) $\mathcal{P}(A) =$

f) $\mathcal{P}(D \setminus B) =$

g) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(D \setminus B) =$

15. Sean los conjuntos $\mathbb{U} = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \}$, $A = \{\ 2,\ 3,\ 4\ \}$, $B = \{\ 3,\ 4,\ 5\ \}$ $D = \{\ 1,\ 3,\ 5,\ \}$ y $E = \{\ 3,\ 5\ \}$.

a) Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones.

1) $(3, 5) \in A \times B$.
2) $(3, 5) \in B \times A$.
3) $E \times D \subseteq B \times A$.
4) $\{\ 3,\ 5\ \} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$.
5) $\phi \in \mathcal{P}(A)$
6) $\{\ 3,\ 5\ \} \in \mathcal{P}(B)$

Capítulo 3

Números reales

Tres conceptos son considerados fundamentales en la Matemática: conjunto, número real y función. Del primero ya hablamos en el capítulo anterior. Aunque de manera introductoria, también hemos tocado el tema de funciones, el cual posteriormente lo retomaremos para funciones reales. Ahora toca estudiar los números reales desde el punto de vista axiomático.

3.1. El conjunto $\mathbb{R}$

Aceptamos la existencia del conjunto $\mathbb{R}$, conocido como conjunto de los números reales, en el que se encuentran definidas dos operaciones binarias: suma "+" y producto "$\cdot$". Las dos operaciones están bien definidas, es decir que satisfacen la propiedad de cerradura:

Propiedad de cerradura

Para cualesquiera números reales x e y, se satisfacen las siguientes afirmaciones:

i. $x + y$ es un número real.

ii. $x \cdot y$ es un número real.

Cuando se afirma que $x + y$ es un número real, debemos entender que $x + y$ no puede representar dos valores distinos (la suma de dos números reales genera un único resultado). Una afirmación análoga se da para el caso del producto.

Propiedades de la igualdad

También aceptamos, en $\mathbb{R}$, la relación de igualdad "$=$" satisfaciendo las siguientes propiedades. Sean a, b, c cualesquiera números reales, es decir $a, b, c \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $a = a$. Reflexiva
2. Si $a = b$, entonces $b = a$. Simétrica
3. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$. Transitiva
4. Si $a = b$, entonces

   i. $a + c = b + c$.

ii. $ac = bc$.

5. Propiedad de sustitución. Si $a = b$, entonces a puede ser sutituida por b en cualquier expresión sin cambiar el valor de verdad o la relación que tenga con otra expresión.

3.2. Axiomas de campo

Para el estudio formal de los números reales requerimos de sus axiomas, los cuales tenemos en tres clases: axiomas de campo, axiomas de orden y axioma del supremo. Empezaremos, como es costumbre, con los axiomas de campo.

Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes leyes, o axiomas de los números reales:

1. Conmutativa
   a) $x + y = y + x$
   b) $x \cdot y = y \cdot x$
2. Asociativa
   a) $x + (y + z) = (x + y) + z$
   b) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
3. Distributiva

   $z(x + y) = zx + zy$ ó $(x + y)z = xz + yz$.
4. Ley del neutro. Existen $0 \in \mathbb{R}$ y $1 \in \mathbb{R}$, con $0 \neq 1$ tales que:
   a) 0 es único y $x + 0 = x$.
   b) 1 es único y $x \cdot 1 = x$.

   Al 0 se le conoce como neutro aditivo o cero y a 1 se le conoce como neutro multiplicativo o uno.
5. Ley de inverso.
   a) Existe $-x \in \mathbb{R}$, tal que $x + (-x) = 0$.
   b) Si $x \neq 0$, entonces existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Surgen propiedades que debe ser demostradas, pues su uso recurrente así lo exige. A menos que se especifique otra cosa, nuestro conjunto universo es $\mathbb{R}$.

TEOREMA 3.2.1

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$.

2. Si $b \neq 0$*, entonces* $b^{-1} \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea t un número real arbitrario.

   $t \cdot 0 = t \cdot (0 + 0)$ neutro aditivo

$t \cdot 0 = t \cdot 0 + t \cdot 0$ propiedad distributiva

$t \cdot 0 + (-\, t \cdot 0) = t \cdot 0 + t \cdot 0 + (-\, t \cdot 0)$ sumando inverso aditivo

$0 = t \cdot 0 + 0$ asociando y simplificando

Entonces $t \cdot 0 = 0$

$\therefore\ \forall x \in \mathbb{R} \,:\, x \cdot 0 = 0$

2. Supóngase por contradicción que la afirmación es falsa. Entonces

$b \neq 0$ y $b^{-1} = 0$ negación de la implicación

$b^{-1} = 0$ simplificación

$b \cdot b^{-1} = b \cdot 0 = 0$ teorema 3.2.1-1

$b \cdot b^{-1} = 1$ ley de inverso

Entonces $1 = 0$ Contradicción, con ley de neutro.

Observación 3.2.2

1. *Acostumbramos escribir* $a - b$ *en lugar de* $a + (-b)$*. Es decir que consideramos como cierta la afirmación* $a - b = a + (-b)$*.*
2. *También escribimos* $\dfrac{a}{b}$ *en lugar de* $a(b^{-1})$*. Consideramos como cierta la igualdad* $\dfrac{a}{b} = a(b^{-1})$ *(producto de fracciones).*
3. *Sin pérdida de formalidad escribimos* $a+b+c$ *para denotar la operación* $(a+b)+c$ *o bien* $a+(b+c)$*. Análogamente con el producto* abc*.*

3.2.1. Propiedades algebraicas

En el proceso de transformar expresiones algebraicas, constantemente recurrimos a ciertas propiedades que tradicionalmente consideramos como válidas. Dichas afirmaciones provienen de los axiomas de campo.

Teniendo en cuenta las propiedades de la igualdad, todas las propiedades operacionales de los números son consecuencia de los axiomas de campo.

Teorema 3.2.3 *Para todo* $a, b \in \mathbb{R}$*, se tiene:*

1. $(-1) \cdot b = -b$.
2. $-(-b) = b$.
3. *Si* $b \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\}$*, entonces* $(b^{-1})^{-1} = b$.
4. *i.* $-(a+b) = (-a) + (-b)$ (*o* $-(a+b) = -a - b$)
   ii. $-(ab) = (-a)b = a(-b)$

Demostración. Haremos la demostración de la propiedad 3, dejando como ejercicio las restantes. Supóngase directamente que $b \neq 0$. Entonces

$b \neq 0$ hipótesis

$b^{-1} \neq 0$ teo 3.2.1

$b \cdot b^{-1} = 1$ definición (ley de inverso)

$b^{-1} \cdot b = 1$ conmutativa

Entonces $(b^{-1})^{-1} = b$ inverso de b^{-1} . ■

En general todas las operaciones algebraicas como suma resta, producto, división, potenciación y radicación, tienen como base la suma y el producto.

Ejercicios 13 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$. Demostrar las siguientes afirmaciones.*

1. *Si $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, entonces $ab \neq 0$ y $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$*
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}} = \frac{b}{a}$

Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Distinguimos algunos subconjuntos importantes de números reales.

- Los números naturales (enteros positivos): $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$
- Los números enteros: $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$
- Los números racionales: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a, b \in \mathbb{Z}, \text{ y } b \neq 0 \right\}$

  Claramente $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.
- Los números irracionales $\mathbb{I} = \{ y \in \mathbb{R} \;/\; y \notin \mathbb{Q} \}$

Definición 3.2.4 (Potencias enteras) *Para $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$, definimos inductivamente las potencias de a como sigue:*

Si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$.

- $a^1 = a$
- $a^2 = a \cdot a$

  $\vdots$
- $a^n = a^{n-1} \cdot a = a \cdot a \cdots a$ (*n-factores*).

En el caso de potencias negativas tenemos la siguiente definición.

Definición 3.2.5 *Para $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$, tenemos:*

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \frac{1}{a^n} \quad , \text{ con } \quad n \in \mathbb{N}$$

De la definición de potencia de un número real, se desprenden las siguientes propiedades

TEOREMA 3.2.6 *Sean $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces*

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ , \quad b \neq 0.$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la propiedad 4, las restantes quedan como ejercicio para el lector.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(ab^{-1}\right)^n$ por definición de inverso.

$\left(ab^{-1}\right)^n = a^n(b^{-1})^n$ por propiedad 2.

$a^n b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$ por definición.

Entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. ■

3.2.2. Ecuaciones lineales

Para la resolución de ecuaciones de primer orden, requerimos del siguiente teorema.

TEOREMA 3.2.7 *Sean a, $b \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. *Existe $x \in \mathbb{R}$, único tal que $a + x = b$.*
2. *Si $a \neq 0$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$, único tal que $ax = b$.*

DEMOSTRACIÓN. Tanto en 1 como en 2, la demostración requiere de dos etapas: primero demostrar que hay solución (existencia) y, posteriormente, garantizar que es única (unicidad). Dejamos la afirmación 2 como ejercicio.

1. i. Demostraremos la existencia obteniendo una solución. Supóngase que t es tal que satisface la ecuación $a + x = b$. Entonces

   $a + t = b$
   $(a + t) - a = b - a$ sumando $-a$

$t = b - a$ simplificando

Puede verificarse que $t = b - a$ es una solución.

ii. Para demostrar unicidad, supongamos que t_1 y t_2 son tales que satisfacen la ecuación $a + x = b$. Entonces

$a + t_1 = b$ y $a + t_2 = b$

$a + t_1 = a + t_2$ propiedad transitiva

$t_1 = t_2$ sumando $-a$

Por lo tanto, no puede haber dos soluciones distintas. ■

El teorema 3.2.7 nos indica cómo encontrar la solución de una ecuación lineal (la incógnita aparece con potencia 1) y nos garantiza la unicidad de la misma. Las ecuaciones lineales son en primera instancia la base para resolver ecuaciones no lineales, siempre que éstas puedan ser reducidas a lineales.

Ejemplo 27 *Encontrar las soluciones de la ecuación:*

$$\frac{x+5}{1-2x} = \frac{4-x}{3+2x}$$

Solución. Supongamos que t *es una solución. Entonces* $\frac{t+5}{1-2t} = \frac{4-t}{3+2t}$

Tenemos las restricciones $t \neq \frac{1}{2}$ *y* $t \neq -\frac{2}{3}$ *pues al sustituir, en las fracciones, se indefinen ya que no existe la división por cero (no existe* 0^{-1}*)*

$(1-2t)(3+2t)\frac{t+5}{1-2t} = (1-2t)(3+2t)\frac{4-t}{3+2t}$ *multiplicando por* $(1-2t)(3+2t)$

$(3+2t)(t+5) = (1-2t)(4-t)$ *asociando y simplificando, con ley de inverso*

$2t^2 + 13t + 15 = 2t^2 - 9t + 4$ *desarrollando productos*

$22t + 11 = 0$ *sumando* $-2t^2 + 9t - 4$

$22t = -11$ *sumando* -11

$t = -\frac{11}{22}$ *multiplicando por* $(22)^{-1} = \frac{1}{22}$

Entonces la única solución es $t = -\frac{1}{2}$, *(pues* $\frac{11}{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{11} = \frac{1}{2}$*).*

Ejercicios 14 *Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:*

1. $6x - 7 = 2x + 29$
2. $\frac{x-5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4x+2}{9}$
3. $8x + \frac{11}{3} = \frac{1}{5}x - 7$
4. $(3x-2)(x-5) = 4 + 3(x-2)(x+7)$
5. $\frac{x^2+2x}{3} - x = \frac{x(x-1)}{3}$
6. $\frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x+1+\frac{1}{x}} = 1.$

3.2.3. Ecuaciones cuadráticas y no lineales

Cuando ya no es posible reducir una ecuación a una lineal, en general la incógnita no puede ser despejada en forma inmediata y por ello debemos buscar otras herramientas para encontrar soluciones. El problema de resolver una ecuación no lineal encuentra alternativa gracias al siguiente teorema.

Teorema 3.2.8 *Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que la afirmación es falsa. Entonces

$ab = 0,\ a \neq 0$ y $b \neq 0$ negación de implicación

$ab = 0$ y $a \neq 0$ simplificación

$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$ multiplicando por a^{-1}

$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a) \cdot b = 0$ asociando

$1 \cdot b = 0$ simplificando

$b = 0$ y $b \neq 0$ Contradicción

Por lo tanto: si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. ∎

La estrategia para resolver una ecuación cuadrática, por lo tanto, consiste en: transformarla en una expresión igualada a cero. A continuación, si es necesario, se busca factorizar el miembro no nulo para poder aplicar el teorema 3.2.8.

Ejemplo 28

1. *Resolver la ecuación* $(2x + 1)^2 = \frac{25}{9}$.

Supóngase que t *es una solución. Entonces*

$(2t + 1)^2 = \frac{25}{9}$

$(2t + 1)^2 - \frac{25}{9} = 0$ *sumando* $-\frac{25}{9}$

$\left[(2t + 1) - \frac{5}{3}\right] \cdot \left[(2t + 1) + \frac{5}{3}\right] = 0$ *diferencia de cuadrados*

Según teorema 3.2.8 tenemos dos casos: $(2t + 1) - \frac{5}{3} = 0$ *o* $(2t + 1) + \frac{5}{3}$

Caso 1. $(2t + 1) - \frac{5}{3} = 0$

$2t - \frac{2}{3} = 0$ *simplificando*

$2t = \frac{2}{3}$ *sumando* $\frac{2}{3}$

$t = \frac{2}{2 \cdot 3}$ *multiplicando por* $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{3}$ *simplificando.*

Caso 2. $(2t + 1) + \frac{5}{3} = 0$

$2t + \frac{8}{3} = 0$ *simplificando*

$2t = -\frac{8}{3}$ *sumando* $-\frac{2}{3}$

$t = -\frac{8}{2 \cdot 3}$ *multiplicando por* $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$t = -\frac{4}{3}$ *simplificando*

Por lo tanto, el conjunto solución es: $C_s = \{\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{4}{3}\ \}$.

2. *Resolver la ecuación* $3x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 2$.

   Supóngase que t *es una solución. Entonces*

   $3t^2 + 2t + 1 = t^2 + t + 2$

   $2t^2 + t - 1 = 0$ *sumando* $-t^2 - t - 2$

   $(2t - 1)(t + 1) = 0$ *factorizando.*

   Por teorema 3.2.8 tenemos dos casos: $(2t - 1) = 0$ *o* $(t + 1) = 0$.

   Caso 1. $(2t - 1) = 0$

   $t = \frac{1}{2}$ *despejando* t

   Caso 2. $(t + 1) = 0$

   $t = -1$ *sumando* -1

   Por lo tanto, el conjunto solución es: $C_s = \{\ \frac{1}{2}\ ,\ -1\ \}$.

3. *Resolver la ecuación* $\frac{5w-22}{w^2-6w+9} - \frac{5}{w} = \frac{11}{w^2-3w}$

   $\frac{w(5w-22)-5(w^2-6w+9)}{w(w^2-6w+9)} = \frac{11}{w^2-3w}$ *sumando fracciones*

   $\frac{5w^2-22w-5w^2+30w-45}{w(w^2-6w+9)} = \frac{11}{w^2-3w}$ *desarrollando productos*

   $\frac{8w-45}{w(w^2-6w+9)} = \frac{11}{w^2-3w}$ *simplificando*

   $\frac{8w-45}{w(w-3)(w-3)} = \frac{11}{w(w-3)}$ *factorizando*

   $8w - 45 = 11(w - 3)$ *multiplicando* $w(w - 3)^2$

   $8w - 45 = 11w - 33$ *desarrollando el producto*

   $-12 = 3w$ *sumando* $-8w + 33$*, y simplificando*

   Por lo tanto la solución es $w = \frac{-12}{3} = -4$.

Ejercicios 15 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1. $z^2 - \frac{36}{25} = 0$
2. $x(2x + 1) = 1$
3. $y^2 + 8y = -16$
4. $(t - 1)(t - 4) + 2t = t(t + 3)$
5. $(w - 5)^2 = -4$
6. $y(y + 1) = 1$
7. $\frac{5x-22}{x^2-6x+9} - \frac{5}{x} = \frac{11}{x^2-3x}$

8. $x - \frac{4}{x} - 7(x - \frac{4}{x} + 12) = 0$

9. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 1$

10. $\dfrac{x+1-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = x + 2$

11. $x = \frac{15}{x-2}$

12. $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

13. $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}$

14. $\frac{12}{3w-2} = \frac{8}{3w+2} + \frac{33w-2}{4-9w^2}$.

La raíz cuadrada

En la siguiente sección estudiaremos los axiomas de orden de los números reales. Sin embargo, debido a los objetivos de la presente sección, es necesario hacer referencia a la relación de orden, así como algunas de sus propiedades.

Geométricamente asociamos los números reales con una recta graduada (recta real), en la que elegimos un punto y lo identificamos con el número 0. Para $a < b$ también escribimos $b > a$ y lo expresamos verbalmente como " b es mayor que a". Los números positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero. Es costumbre usar símbolos tales como: $>$, $\leq$ y $\geq$.

- $a > b$ se lee como " a es mayor que b".
- $a \geq b$ se lee como " a es mayor o igual que b".
- $a \leq b$ se lee como " a es menor o igual que b".

Por el momento sólo necesitamos de dos propiedades específicas, que posteriormente demostraremos (teorema 3.5.3 y corolario 3.5.4).

Afirmación 5

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.
2. $1 > 0$.

Definición 3.2.9 *Sea $x \geq 0$. La raíz cuadrada de x, la escribimos como $\sqrt{x}$, es definida como*

$$\sqrt{x} = y \iff y^2 = x$$

Por la afirmación 5 (teorema 3.5.3) la raíz cuadrada existe sólo para números no negativos (mayores o iguales que cero).

También se cuenta con la notación $\sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}$, que por su compatibilidad resulta ser la base para generalizar las propiedades a potencias racionales.

Definición 3.2.10 *Sea $x \geq 0$. La raíz n-ésima de x, la escribimos como $\sqrt[n]{x}$, es definida como:*

$$y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x$$

Cuando n es par, $\sqrt[n]{x}$ existe sólo para números no negativos. Debido a que $\sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{1}{n}}$, tenemos propiedades de raíces mediante propiedades de potencia (teorema 3.2.6), aclarando que $(a)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ se satisface siempre que la raíz exista.

Proposición 3.2.11 (Propiedades de raíz)

1. $(\sqrt[n]{x})^n = x$
2. $\sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
3. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

Demostración. Ejercicio.

En el caso de encontrarse con ecuaciones en que aparecen radicales, lo conveniente es usar la proposición 3.2.11, junto con el siguiente teorema.

Teorema 3.2.12 *Si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$.*

Demostración. Directamente supongamos que $a = b$. Entonces

1. $a = b$ hipótesis
2. $a^2 = ab$ multiplicando por a
3. $ab = b^2$ de 1, multiplicando por b

Por lo tanto $a^2 = b^2$ de 2 y 3, por propiedad transitiva de la igualdad. ∎

Ejemplo 29 *Resolver la ecuación $\sqrt{x+7} - 1 = x$.*

Sea t una solución. Entonces

$\sqrt{t+7} - 1 = t$

$\sqrt{t+7} = t + 1$ *sumando* 1

$(\sqrt{t+7}\ )^2 = (t+1)^2$ *elevando al cuadrado, teo. 3.2.12*

$t + 7 = t^2 + 2t + 1$ *proposición 3.2.11, y desarrollando el cuadrado*

$0 = t^2 + t - 6$ *sumando* $-t-7$ *y simplificando*

$(t-2)(t+3)$ *factorizando*

Por teorema 3.2.8, tenemos dos casos

Caso 1. $(t-2) = 0$, *por lo que* $t = 2$
Caso 2. $(t+3) = 0$, *por lo que* $t = -3$

Luego de sustituir en la ecuación, el conjunto solución es: $C_s = \{\,2\,\}$.

3.3. Ecuación general de segundo grado

Tal vez el lector ya habrá notado que existen expresiones algebráicas en que no es posible factorizar mediante productos notables. Sin embargo, para las ecuaciones cuadráticas siempre es posible determinar si hay o no soluciones. La construcción de una fórmula general para las ecuaciones de segundo grado está basada en completar trinomio cuadrado perfecto.

Resolución de ecuaciones vía trinomio cuadrado perfecto

Basados en el desarrollo $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ resolveremos ecuaciones cuadráticas, tengan o no factorización. Ilustraremos el método mediante un ejemplo.

Ejemplo 30

1. *Resolver la ecuación* $x^2 - x - 3 = 0$.

   $x^2 - 2x = 3$ *sumando* 3

   Los primeros dos términos son semejantes a $x^2 + 2ax$

   En este caso tenemos que $2a = -1$, *por lo que* $a = -\frac{1}{2}$

   Para que el miembro izquierdo sea un cuadrado perfecto basta sumarle a^2

   $x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ *sumando* $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

   $x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \frac{1}{4}$

   $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ *factorizando y simplificando*

   $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2$ *def. de raíz, proposición 3.2.11*

   $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2 = 0$ *sumando* $-\left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2$

   $\left(\left(x - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{13}{4}}\right) = 0$ *diferencia de cuadrados*

   $\left(\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0$ *propiedades de raíz*

   Tenemos dos casos, proposición 3.2.8

   a. $\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{13}}{2} = 0$

   Por lo que $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

   b. $x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = 0$

   Por lo que $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

2. *Resolver la ecuación* $\dfrac{3y}{2} = 3 - \dfrac{6}{y-2}$

   $3y(y - 2) = 3 \cdot 2(y - 2) - 12$ *multiplicando por* $2(y - 2)$

   $3y^2 - 6y = 6y - 12 - 12$ *desarrollando productos*

   $3y^2 - 12y = -24$ *multiplicando por* $2(y - 2)$

   $y^2 - 4y = -8$ *multiplicando por* $\frac{1}{3}$

   procedemos a completar trinomio cuadrado perfecto

   $y^2 - 4y + 4 = -4$ *sumando* $(-2)^2 = 4$

$(y-2)^2 = -4$ *factorizando*

Entonces no existe solución, por la afirmación 5.

En segunda instancia, tenemos el recurso de transformar una ecuación que no es cuadrática en otra que sí lo es, logrando resolverla. Sin embargo se requiere tener presente que no toda solución de una ecuación cuadrática corresponde a una solución de la ecuación original.

Ejemplo 31

3.3.1. La fórmula general de segundo grado

Ya estamos en condiciones para construir en forma general la solución de cualquier ecuación cuadrática.

Para $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}$ y $A \neq 0$, la ecuación general de segundo grado es:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1)$$

A continuación, procedemos a resolver en forma general la ecuación (1). Supongamos que $x \in \mathbb{R}$ es una solución. Entonces

1. $Ax^2 + Bx + C = 0$

   Ahora hacemos que el coeficiente de x^2 sea 1.

2. $x^2 + \frac{Bx}{A} + \frac{C}{A} = 0$ multiplicando por A^{-1}

   Procedemos a completar trinomio cuadrado perfecto.

3. $x^2 + \frac{Bx}{A} = -\frac{C}{A}$ sumando $-\frac{C}{A}$

4. $x^2 + \frac{B}{A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 = -\frac{C}{A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2$ sumando $\left(\frac{B}{2A}\right)^2$

5. $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = -\frac{C}{A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2$ factorizando

   Tenemos dos posibilidades: $-\frac{C}{A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 \geq 0$ ó $-\frac{C}{A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 < 0$

Caso 1. $-\frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2} \geq 0$.

a) $x + \frac{B}{2A} = \pm\sqrt{-\frac{C}{A} + \frac{B^2}{4A^2}}$ sacando raíz cuadrada

b) $x = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{-4AC+B^2}{4A^2}}$ despejando x y sumando fracciones

c) $x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ simplificando el radicando

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

Caso 2. $-\frac{C}{A} + \left(\frac{B}{2A}\right)^2 < 0$. Por el teorema 3.5.3, no existe solución.

Así, la ecuación general de segundo grado tiene a lo más dos soluciones, determinadas por:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

La expresión $D = B^2 - 4AC$ (radicando) se llama discriminante.

Tenemos el criterio para las soluciones de la ecuación cuadrática, a partir de D.

i. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución.

ii. Si $D = 0$, hay una única solución (de multiplicidad dos): $x = \frac{-B}{2A}$.

iii. Si $D > 0$, tenemos dos soluciones (distintas), a saber:

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

En resumen, dada una ecuación cuadrática, siempre es posible determinar si existe solución o no.

3.4. Ejercicios

1. Escribe la propiedad o axioma que justifique cada paso en la siguiente demostración de: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, para $b,d\neq 0$.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = ab^{-1}+cd^{-1}$	Notación
$= ab^{-1}(1)+cd^{-1}(1)$	______________
$= ab^{-1}(d^{-1}d)+cd^{-1}(b^{-1}b)$	______________
$= a(b^{-1}d^{-1})d+c(d^{-1}b^{-1})b$	______________
$= ad(b^{-1}d^{-1})+cb(d^{-1}b^{-1})$	______________
$= ad(bd)^{-1}+cb(db)^{-1}$	______________
$= ad(bd)^{-1}+bc(bd)^{-1}$	______________
$= (ad+bc)(db)^{-1}$	______________
$= \frac{ad+bc}{bd}$	Notación

2. Demuestra las siguientes afirmaciones

   a) Si $a^3=b^3$, entonces $a=b$

   b) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

   c) $\frac{a+b}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}$

   d) $\left(\frac{b}{d}\right)^{-1}=\frac{b^{-1}}{d^{-1}}=\frac{d}{b}$

   e) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

3. Demuestra la afirmación si es verdadera, de lo contrario proporciona un contraejemplo.

   a) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

   b) $\frac{a}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{a}{d}$

   c) $a^2=b^2 \implies a=b$

   d) $(a+b)^2=a^2+b^2$

   e) $\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{x+z}{y+w}$

f) $\frac{x+b}{x+a} = \frac{b}{a}$

4. Hallar la solución de las siguientes ecuaciones

a) $7x - 5 = 3x + 15$

b) $7x + \frac{13}{2} = \frac{1}{4} - 5x$

c) $\frac{x-4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{4x+2}{5}$

d) $x - \frac{3}{x} - 5(x - \frac{3}{x} + 10) = 0$

e) $x^2 + 10x + 8 = 0$

f) $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} = 1$

g) $-(5x + 4)^2 = 6$

h) $\frac{(3x-4)^2}{5} = 6x - 3$

i) $\frac{4}{(5x+2)^2} = -3$

j) $\frac{5-4x}{5x+2} = \frac{6-4x}{5-2x}$

k) $\frac{3x-4}{5} + \frac{7}{5} = 6x - 3$

l) $\frac{6x+5}{12} + \frac{2x-3}{3x+6} = \frac{3x+7}{6}$

m) $\frac{x-3}{x-4} - \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-6}{x-7} - \frac{x-7}{x-8}$

n) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{x^2-x}$

ñ) $\frac{2x+7}{x^2-5x+4} + \frac{x-8}{x^2-4x+3} = \frac{x}{x^2-7x+12}$

5. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\frac{x-2}{4} + 9\sqrt{\frac{x-2}{4}} = 10$

b) $\sqrt{3-x} - \sqrt{2+x} = 1$

c) $(2x^2 - x - 1)\sqrt{x^2 - 2x} = 0$

d) $\sqrt{z+2} + \sqrt{2z+2} = \sqrt{6z+7}$

e) $\sqrt{2x+2} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{11x+4}$

f) $x - 2 = \sqrt{x+10}$

g) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x+10} = 2$

6. Resolver las siguientes ecuaciones

   a) $x^6 + x^3 = 4$

   b) $x^4 - 6x^2 - 5 = 0$

   c) $x^2 + 10x + 8 = 0$

   d) $(z^2 - 2)^2 = 9$

   e) $w^4 - 4w^2 - 5 = 0$

   f) $y^4 - 10y^2 - 4 = 0$

   g) $x^6 + 2x^3 + 1 = 0$

   h) $y^6 + y^3 - 2 = 0$

7. Usando la fórmula general determina para qué valores de m la siguiente ecuación tiene una sola raíz.

$$(m+1)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$$

8. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas, en centímetros, tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.

9. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino uniforme, de arena. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

10. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 390 m. La altura que pasa por el vértice opuesto a la hipotenusa mide 60 m. Calcula las longitudes de los lados del triángulo.

3.5. Axiomas de orden

Como ya hemos mencionado, asociamos los números reales con una recta graduada (recta real), en la que elegimos un punto de referencia que identificamos con el número cero (0). Los números positivos $\mathbb{R}^+$ están a la derecha del cero y los negativos $\mathbb{R}^-$ a la izquierda del cero.

Definición 3.5.1 *En los números reales existe una relación de orden, denotada por "$<$" que definimos como:*

$$a < b \quad \textit{si y sólo si} \quad b - a \quad \textit{es positivo.}$$

- $a < b$ se lee como "a es menor que b".
- También escribimos $b > a$ y lo leemos como "b es mayor que a".
- Cuando x es un número positivo, escribimos $0 < x$ (o bien $x > 0$).
- Si x es un número negativo, escribimos $x < 0$.

Axiomas de orden

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$. Tenemos los siguientes axiomas de orden.

AO1. Ley de tricotomía. Una y sólo una de las siguientes afirmaciones se cumple

i. $a < b$

ii. $a = b$

iii. $a > b$

AO2. Ley transitiva. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

AO3. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

AO4. Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Observación 3.5.2

- *Escribimos* $x \leq z$ *para afirmar:* $(x < z) \vee (x = z)$.
- *Escribimos* $x \geq z$ *para afirmar:* $(x > z) \vee (x = z)$.
- *También, escribimos* $a \leq x \leq b$ *para afirmar* $(a \leq x) \wedge (x \leq b)$.

3.5.1. Consecuencias de los axiomas de orden

Junto con los axiomas de campo, la práctica que usualmente tenemos de los números con respecto a desigualdades es consecuencia de los axiomas de orden. Iniciamos demostrando algunas propiedades básicas, la primera propiedad ya la hemos usado para determinar la solución general de la ecuación de segundo grado:

Teorema 3.5.3

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

Demostración. Nos apoyaremos con la ley de tricotomía. Sea $x \in \mathbb{R}$, arbitrario. Entonces se tienen tres casos para el número real x.

i). $x > 0$. Entonces

$x \cdot x > 0 \cdot x$ aplicando AO4

Por lo que $x^2 \geq 0$.

ii). $x = 0$. Entonces

$x^2 = x \cdot x = 0$ multiplicando por x

De donde $x^2 \geq 0$.

iii). $x < 0$. Entonces

$0 < -x$ sumando $-x$

$0 \cdot (-x) < (-x) \cdot (-x)$ Multiplicando por $-x$, AO4

Luego $x^2 \geq 0$

Por lo tanto $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

■

Aunque la siguiente afirmación puede ser demostrada sin recurrir al teorema anterior, es más simple plantearla como corolario.

Corolario 3.5.4 $1 > 0$

Demostración. Por definición de cuadrado y de neutro multiplicactivo tenemos:

$(1)^2 \geq 0$

$1 = 1 \cdot 1 = (1)^2$

$1 \geq 0$ teorema 3.5.3

$1 > 0 \vee 1 = 0$ definición de $\geq$

$1 \neq 0$ ley de neutro (axiomas de campo)

Por lo tanto $1 > 0$.

■

Una propiedad que consideramos importante, pues para resolver desigualdades se requiere tenerla presente, es la siguiente.

Teorema 3.5.5 *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. $a < b$ y $c < 0$ hipótesis
2. $c < 0$ simplificación
3. $0 < -c$ sumando $-c$
4. $a < b$ simplificación
5. $a(-c) < b(-c)$ multiplicando por $-c$
6. $-ac < -bc$ ley de signos
7. $-ac + bc < 0$ sumando bc
8. $bc < ac$ sumando ac
9. Entonces $ac > bc$ ∎

OBSERVACIÓN 3.5.6

- *Puesto que* $2 - 1 = 1 > 0$, *entonces* $2 > 1$. *De manera general: para todo* $n \in \mathbb{N} \setminus \{ 1 \}$, *se tiene que* $1 < n$.
- *Por el corolario 3.5.4, tenemos que:* $-1 < 0$ *(¿por qué?)*
- *Además, por el teorema 3.5.5,* $n > 1$ *implica* $-n < -1$.

Recordemos que la representación gráfica de los números reales es mediante la recta real. Una clase de subconjuntos de $\mathbb{R}$ es relevante pues nos ayuda a determinar las soluciones de inecuaciones.

Definición 3.5.7 (Intervalos) *Los siguientes conjuntos se conocen como intervalos.*

- $[a\,,\,b] = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b \}$ *Intervalo cerrado.*
- $(a\,,\,b) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b \}$ *Intervalo abierto.*
- $[a\,,\,b) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b \}$ *Intervalo semicerrado*
- $(a\,,\,b] = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b \}$ *Intervalo semiabierto.*
- $[a\,,+\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \}$ *Intervalo infinito a la derecha.*
- $(a\,,+\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \}$ *Intervalo infinito a la derecha.*
- $(-\infty\,,b] = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b \}$ *Intervalo infinito a la izquierda.*
- $(-\infty\,,b) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x < b \}$ *Intervalo infinito a la izquierda.*

Los símbolos ∞ y $-\infty$ no representan números reales, sólo nos permiten definir intervalos en los que uno de sus extremos se prolonga infinitamente. Con notación de intervalos haremos referencia a algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$, tales como: $\mathbb{R}^+ = (0\,,+\infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty\,,0)$, $\mathbb{R} = (-\infty\,,\infty)$.

TEOREMA 3.5.8

1. *Si* $a < b$ *y* $c < d$ *, entonces* $a + c < b + d$.

2. *Si* $x > 0$*, entonces* $x^{-1} > 0$.

3. *Si* $0 < a < b$*, entonces* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Demostración. Se deja como ejercicio. ∎

3.5.2. Desigualdades

Con los axiomas y las propiedades hasta ahora obtenidas, ya podemos resolver desigualdades, lineales o no lineales, con procedimientos similares a los usados para resolver ecuaciones, con una excepción: al multiplicar en ambos lados de una igualdad por el número a se requiere tener certeza sobre si $a > 0$ o $a < 0$, pues dependiendo de la afirmación se deberá usar determinada propiedad, axioma AO4 si $a > 0$ o bien el teorema 3.5.5 si $a < 0$.

Ejemplo 32 *Hallar el conjunto solución de la inecuación:* $3x + 2 > x - 2$.

$x - 2 < 3x + 2$

$-4 < 2x$ *sumando* $-2 - x$

$-\frac{4}{2} < x$ *multiplicando por* $\frac{1}{2} > 0$

$-2 < x$

Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo $(-2\,,\,+\infty)$

Teorema 3.5.9

1. $ab > 0 \implies (a > 0 \text{ y } b > 0)$ *o* $(a < 0 \text{ y } b < 0)$.

2. $ab < 0 \implies (a > 0 \text{ y } b < 0)$ *o* $(a < 0 \text{ y } b > 0)$.

Demostración. Demostraremos la parte 1, dejando como ejercicio la parte 2.

1. Supongamos que $ab > 0$. Ahora, para el par de números reales a, b, tenemos cuatro casos.

   i. $a > 0$ y $b > 0$. Entonces $ab > 0$ AO4
   ii. $a < 0$ y $b < 0$. Entonces $ab > 0$ teorema 3.5.5
   iii. $a > 0$ y $b < 0$. Entonces $ab < 0$ teorema 3.5.5
   iv. $a < 0$ y $b > 0$. Entonces $ab < 0$ AO4

   Observamos que los únicos casos en que se mantiene $ab > 0$ son i y ii.

   Entonces $(a > 0 \text{ y } b > 0)$ o $(a < 0 \text{ y } b < 0)$. ∎

Ejemplo 33 *Resolver la inecuación:* $3x^2 - 2 > 7$.

$9 < 3x^2$ *sumando* 2

$3 < x^2$ *multiplicando por* $\frac{1}{3} > 0$

$0 < x^2 - 3$ *sumando* -3

$0 < (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ *diferencia de cuadrados*

Por el teorema 3.5.9, tenemos dos casos, provenientes de la afirmación

$$\left(0 < x - \sqrt{3} \ \wedge \ 0 < x + \sqrt{3}\right) \ \vee \ \left(x - \sqrt{3} < 0 \ \wedge \ x + \sqrt{3} < 0\right)$$

a. $0 < x - \sqrt{3} \ \wedge \ 0 < x + \sqrt{3}$

$\sqrt{3} < x \ \wedge \ -\sqrt{3} < x$ *sumando* $\sqrt{3}$ *y* $-\sqrt{3}$, *respectivamente*

Por lo que $C_1 = (\sqrt{3}\,,\, +\infty)$

b. $x - \sqrt{3} < 0 \ \wedge \ x + \sqrt{3} < 0$

$x < \sqrt{3} \ \wedge \ x < -\sqrt{3}$ *sumando* $\sqrt{3}$ *y* $-\sqrt{3}$, *respectivamente*

Por lo que $C_2 = (-\infty\,,\, -\sqrt{3})$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $C_1 \cup C_2 = (-\infty\,,\, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}\,,\, +\infty)$.

Sabiendo que $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$, dejamos como ejercicio la demostración del siguiente corolario

Corolario 3.5.10

1. $\dfrac{a}{b} > 0 \implies (a > 0 \ \text{y} \ b > 0) \ \text{o} \ (a < 0 \ \text{y} \ b < 0)$.

2. $\dfrac{a}{b} < 0 \implies (a > 0 \ \text{y} \ b < 0) \ \text{o} \ (a < 0 \ \text{y} \ b > 0)$.

Ejemplo 34 *Resolver* $\frac{1}{3-x} \geq \frac{1}{3+x}$. *En este caso* $x \neq 3$ *y* $x \neq -3$.

Sea y *una solución. Entonces* $\frac{1}{3-y} \geq \frac{1}{3+y}$.

Un método consiste en eliminar las fracciones multiplicando primero por $3-y$, *con lo que se tienen dos casos:* $3 - y > 0$ *o* $3 - y < 0$. *Posteriormente multiplicar por* $3 + y$, *considerando dos casos más. Procederemos de otra forma, agrupando de un solo lado.*

$\frac{1}{3-y} - \frac{1}{3+y} \geq 0$ *sumando* $-\frac{1}{3+y}$

$\frac{(3+y)-(3-y)}{(3-y)(3+y)} \geq 0$ *sumando fracciones*

$\frac{2y}{(3+y)(3-y)} \geq 0$ *simplificando*

Por el corolario 3.5.10, tenemos dos casos

Caso 1. $2y \geq 0 \quad \wedge \quad (3+y)(3-y) > 0$ (*el denominador no puede ser cero*)

$y \geq 0 \quad \wedge \quad (3+y)(3-y) > 0$ *multiplicando por* $2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$

Para $(3+y)(3-y) > 0$, *por 3.5.9, tenemos dos casos más*

1.A. $y \geq 0 \quad \wedge \quad (\,3+y > 0 \;\wedge\; 3-y > 0\,)$

$y \geq 0 \quad \wedge \quad (\,y > -3 \;\wedge\; 3 > y\,)$ *despejando* y

Entonces $C_{1.A} = [\,0\,,\,+\infty\,) \cap [\,(\,-3\,,\,+\infty\,) \cap (\,-\infty\,,\,3\,)\,] = [\,0\,,\,3\,)$

1.B. $y \geq 0 \quad \wedge \quad (\,3+y < 0 \;\wedge\; 3-y < 0\,)$

$y \geq 0 \quad \wedge \quad (\,y < -3 \;\wedge\; 3 < y\,)$ *despejando* y

Entonces $C_{1.B} = [\,0\,,\,+\infty\,) \cap [\,(\,-\infty\,,\,-3\,) \cap (\,3\,,\,+\infty\,)\,] = \phi$

$\therefore \quad Cs_1 = C_{1.A} \cup C_{1.B} = [\,0\,,\,3\,) \cup \phi = [\,0\,,\,3\,)$

Caso 2. $2y \leq 0 \quad \wedge \quad (3+y)(3-y) < 0$ (*el denominador no puede ser cero*)

$y \leq 0 \quad \wedge \quad (3+y)(3-y) < 0$ *multiplicando por* $2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$

Para la desigualdad $(3+y)(3-y) < 0$, *por 3.5.9, tenemos dos casos*

2.A. $y \leq 0 \quad \wedge \quad (\,3+y > 0 \;\wedge\; 3-y < 0\,)$

$y \leq 0 \quad \wedge \quad (\,y > -3 \;\wedge\; 3 < y\,)$ *despejando* y

Entonces $C_{2.A} = (\,-\infty\,,\,0\,] \cap [\,(\,-3\,,\,+\infty\,) \cap (\,3\,,\,+\infty\,)\,] = \phi$

2.B. $y \leq 0 \quad \wedge \quad (\,3+y < 0 \;\wedge\; 3-y > 0\,)$

$y \leq 0 \quad \wedge \quad (\,y < -3 \;\wedge\; 3 > y\,)$ *despejando* y

Entonces $C_{2.B} = (\,-\infty\,,\,0\,] \cap [\,(\,-\infty\,,\,-3\,) \cap (\,-\infty\,,\,3\,)\,] = (\,-\infty\,,\,-3\,)$

$\therefore \quad Cs_2 = C_{2.A} \cup C_{2.B} = \phi \,\cup\, (\,-\infty\,,\,-3\,) = (\,-\infty\,,\,-3\,)$

Por lo tanto el conjunto solución es:

$$Cs = Cs_1 \cup Cs_2 = [\,0\,,\,3\,) \cup (\,-\infty\,,\,-3\,)$$

Ejercicios 16 *Resolver las siguientes inecuaciones.*

1. $4z - 7 \geq 9z + 2$
2. $5 - (2+y) > -9$
3. $5(x-4) + 6 \leq 5 - x$
4. $-2 - \dfrac{1+y}{3} < \dfrac{y}{4}$
5. $\dfrac{3-m}{2} - \dfrac{17}{4} < \dfrac{m-3}{3} - \dfrac{2m+3}{4}$
6. $\dfrac{y+3}{4} - 2 \geq \dfrac{y-1}{3}$

7. $-10 \leq 2 - z \leq -4$
8. $\dfrac{7}{2} > \dfrac{1-4y}{5} \geq \dfrac{3}{2}$
9. $x^2 + 4x \leq 0$
10. $x^2 - 7x + 6 < 0$
11. $x^2 - 10x + 21 \geq 0$
12. $x^2 - 3 \leq 0$
13. $5x^2 - 20x - 25 > 0$
14. $3x^2 - 18x + 27 \leq 0$
15. $x^2 + 10x + 16 \geq 0$
16. $x^2 - 25x + 150 > 0$
17. $x^2 + 5x < 24$
18. $x^2 \geq 2x + 15$
19. $\dfrac{4x^2-3x+8}{x^2-1} \geq 4$

3.5.3. Valor absoluto

En la recta real, el valor absoluto de a determina la distancia entre a y el cero.

Definición 3.5.11 *El valor absoluto de x es $|x|$ y lo definimos como:*

$$|x| = \begin{cases} x & si \ x \geq 0 \\ -x & si \ x < 0 \end{cases}$$

Como cosecuencia inmediata del valor absoluto, junto con su interpretación en la recta tenemos:

Teorema 3.5.12

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \iff x = 0.$
3. $|x| = |-x|$
4. $x \leq |x| \quad y \quad -x \leq |x|.$

Demostración.

1. Por tricotomía proponemos dos casos:

   i. $x \geq 0$. Entonces $|x| = x \geq 0$.

   ii. $x < 0$. Entonces, multiplicando por -1, $-x > 0$ y $|x| = -x \geq 0$.

   Por lo que para cualquier número real x se tiene que $|x| \geq 0$.

2. Si suponemos que $|x| = 0$ y $x \neq 0$, entonces $|x| \neq 0$, lo que es una contradicción. De donde: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$. La recíproca se obtiene de observar que $|0| = 0$.

3. Si $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$. Entonces $|x| = x$ y $|-x| = -(-x) = x$.

   Por otro lado, si $x < 0$, se tiene que $-x > 0$. Entonces $|x| = -x = |-x|$.

4. Por la propiedad 1. Si $x \geq 0$, entonces $x = |x|$ y $x \leq |x|$. También $-x \leq |x|$.

   Si $x < 0$, entonces $x \leq |x|$. Además $-x \geq 0$ y $|x| = -x$, por lo que $-x \leq |x|$.

∎

Las siguientes propiedades del valor absoluto, aunque no tan inmediatas, también son esperadas e importantes en procesos de simplificación. Se dejan como ejercicio las demostraciones.

Teorema 3.5.13

1. $\sqrt{a^2} = |a|$ *2.* $|ab| = |a| \cdot |b|$

3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ *4.* $|x^n| = |x|^n$

Para resolver ecuaciones que involucran valor absoluto, se debe tener presente la siguiente propiedad.

Teorema 3.5.14 *Sea $b \geq 0$. Entonces*

$$|a| = b \iff a = b \ \ o \ \ a = -b.$$

Ejemplo 35 *Resolver la ecuación:* $|6x - 3| = 9 - 3x$.

- *Cuando* $9 - 3x < 0$ *la ecuación no tiene solución (conjunto vacío).*

  Por lo que nos queda agregar una condición.

  $|6x - 3| = 9 - 3x \ \wedge \ 9 - 3x \geq 0$

- *Por el teorema anterior, 3.5.14, tenemos dos casos*

  $[(6x - 3 = 9 - 3x) \vee (6x - 3 = -(9 - 3x))] \ \wedge \ 9 - 3x \geq 0$

- *Resolviendo*

  $[(9x = 12) \vee (3x = -6)] \ \wedge \ 9 \geq 3x$

  $\left[(x = \frac{12}{9}) \vee (x = -\frac{6}{3})\right] \ \wedge \ \frac{9}{3} \geq x$

  $\left[\, x = \frac{4}{3} \ \vee \ x = -2 \,\right] \ \wedge \ 3 \geq x$

  Por lo tanto el conjunto solución es $C_s = \{ \frac{4}{3} , -2 \}$.

Ejercicios 17 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1. $|9 + 2x| = 3$
2. $|x + 1| = 2|x - 1| + x$
3. $|x - 5| + |3x + 1| = 20$
4. $|7x - 1| + |8 - 7x| = 7$
5. $12x^2 + 12x = 7|2x + 1| + 3$
6. $|8x - x^2 - 12| = 4$
7. $\frac{x}{|x-1|} = 2x - 1$
8. $(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$

Para resolver desigualdades que involucran valor absoluto, las siguientes propiedades son de gran importancia.

Teorema 3.5.15

1. *Sea* $b > 0$. *Entonces:* $|a| < b \iff -b < a < b$.
2. $|a| > b \iff a > b$ *o* $a < -b$.

Ejemplo 36 *Encontrar el conjunto solución de:* $|2x - 1| \geq 3x + 1$.

- *Para poder utilizar el teorema 3.5.15, proponemos dos casos, determinados por la afirmación:*

  $(\ |2x - 1| \geq 3x + 1 \ \wedge\ 3x + 1 \leq 0\ ) \ \vee\ (\ |2x - 1| \geq 3x + 1 \ \wedge\ 3x + 1 > 0\ )$

- *Para* x *tal que* $3x + 1 \leq 0$, *la desigualdad se satisface, pues* $|2x - 1| \geq 0$, *por definición de valor absoluto. Así, el primer caso se reduce a resolver la inecuación:* $3x + 1 \leq 0$

  $3x \leq -1$ *sumando* -1

  $x \leq -\frac{1}{3}$ *multiplicando por* $\frac{1}{3}$

  $C_1 = (\,-\infty\,,\ -\frac{1}{3}\,]$

- *Para el segundo caso, usaremos el teorema 3.5.15.*

  $|2x - 1| \geq 3x + 1 \ \wedge\ 3x + 1 > 0$

  $(\ [2x - 1 \geq 3x + 1] \vee [(2x - 1) \leq -(3x + 1)]\ ) \ \wedge\ 3x + 1 > 0$

- *Resolviendo*

  $(\ -2 \geq x \ \vee\ 5x \leq 0\ ) \ \wedge\ 3x > -1$

  $(\ -2 \geq x \ \vee\ x \leq 0\ ) \ \wedge\ x > -\frac{1}{3}$

- *En términos de intervalos tenemos*

  $(\,(\,-\infty\,,\ -2\,] \cup (\,-\infty\,,\ 0\,]\,) \cap (\,-\frac{1}{3}\,,\ +\infty\,) = (\,-\infty\,,\ 0\,] \cap (\,-\frac{1}{3}\,,\ +\infty\,)$

$C_2 = (\, -\frac{1}{3}\ ,\ 0\,)$

Por lo tanto el conjunto solución es:

$$C_1 \cup C_2 = (\, -\infty\ ,\ -\frac{1}{3} \Big] \cup \Big(-\frac{1}{3}\ ,\ 0 \Big) = (\, -\infty\ ,\ 0\,)$$

Ejercicios 18 *Resolver las siguientes ecuaciones.*

1. $|3y + 2| < 8$
2. $|z - 3| \geq 7$
3. $\frac{3}{|x-1|} \geq 0$
4. $|-7y - 3| > 5$
5. $|4x + 3| + 3x \geq 1$
6. $2x + 1 > |x|$
7. $\frac{|2x-1|}{x+2} < 1$
8. $\left|\frac{5x-2}{4-x}\right| < \frac{1}{3}$
9. $|5x - 3| - |3 - x| < 4$
10. $3x^2 - 11|x| - 4 \geq 0$
11. $|2x^2 - 20x + 37| < 5$
12. $|2x^2 - 13x + 17| \leq 7 - x$
13. $|2x^2 - 11x - 1| < 0$
14. $|4x^2 + 4x - 11| \geq 9 - 2x - 4x^2$

Por su trascendencia, la desigualdad de triángulo merece atención especial.

TEOREMA 3.5.16 (DESIGUALDAD DE TRIÁNGULO)

$$|x + y| \ \leq\ |x| + |y|$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos cuatro casos:

i. $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Entonces $|x + y| = |x| + |y|$

ii. $x < 0$ y $y < 0$. Entonces $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$

iii. $x \geq 0$ y $y < 0$. Si $|x+y| = (x+y)$, entonces $x+y < x-y = |x|+|y|$. Además, si $|x+y| = -(x+y)$, entonces $-x - y \leq x - y = |x| + |y|$. Entonces $|x + y| \ \leq\ |x| + |y|$.

iv. $x < 0$ y $y \geq 0$. Análogo al caso iii.

■

3.6. Ejercicios

1. Si es verdadera la afirmación demuéstrala, de lo contrario proporciona un contraejemplo.

   a) $(\sqrt{a})^2 = a$

   b) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$

   c) Si $a^2 < b^2$, entonces $a < b$

   d) $|a + b| = |a| + |b|$

2. Demuestra las siguientes afirmaciones

   a) Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$

   b) $0 < a^{-1}$ si y sólo si $0 < a$

   c) $a^{-1} < 0$ si y sólo si $a < 0$

   d) Si $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$

3. Resolver las siguientes inecuaciones

   a) $x^2 - x - 6 > 0$

   b) $3x - 3x^2 - 2 \geq 4x - 9x^2 - 1$

   c) $9x^2 + 10x - 18 < 2x^2 - 11x + 10$

   d) $2x - 1 < \dfrac{3x}{2} < x + 1$

   e) $\dfrac{2+3x}{3-4x} \leq 2$

   f) $\dfrac{4x-3}{5-x} \geq -5$

   g) $\dfrac{2x+1}{x+6} \geq 3$

   h) $x + 1 \geq \dfrac{1}{1-x}$

   i) $\dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{4}{(1-x)(x-5)}$

   j) $3 + \dfrac{12}{x-4} \leq \dfrac{5}{2x-7}$

   k) $2|3 - x| + 3x > 3$

   l) $3|x - 4| - |2x| \leq x - 6$

   m) $\dfrac{x^2-1}{-x^2+2x-1} \leq 0$

n) $\frac{x^2+4}{x^2-4} \geq 0$

ñ) $3|x-7| > |4x+7|$

o) $|4x-2| \geq 3x+1$

p) $|4 - \frac{2}{3}x| > \frac{6}{5}$

q) $\left|\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right| \geq x$

r) $\left|\frac{2-x}{3}\right| + 3 \leq x$

s) $1 < \left|\frac{x+3}{x-2}\right| < 2$

4. Resolver las siguientes ecuaciones

a) $|3x-5| = -x+7$

b) $|x+1| = 2|x-1| + x$

c) $3|-5x-1| = -2x+3$

d) $|x-5| + |3x+1| = 20$

e) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 2$

Capítulo 4

Funciones

Aunque ya hemos planteamos las funciones como un caso particular de relaciones (definición 2.5.4), de A (conjunto de salida) en B (conjunto de llegada), en este capítulo estudiaremos funciones reales (el conjunto de salida y el de llegada es $\mathbb{R}$).

Definición 4.0.1 *Una función real $f : X \longrightarrow Y$, o simplemente función, es una relación en $\mathbb{R}$, en que a cada elemento $x \in X$ (de salida) le corresponde a lo más un elemento $y \in Y$ (de llegada).*

Gracias a la característica que deben cumplir las parejas, es costumbre escribir $b = f(a)$ para indicar que $(a, b) \in f$ (en lugar de afb).

Debido a que en general no es posible determinar por extensión una función real (pues $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito), se acostumbra hacer referencia a una función indicando la forma en que están relacionados sus elementos.

Por ejemplo, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 3x^2 + 1.$$

Nos indica que f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que cada elemento $a \in \mathbb{R}$ está relacionado con el elemento b, que se obtiene mediante la expresión

$$b = 3a^2 + 1$$

Así, $f(3) = 3(3^2) + 1 = 28$ y $f(-1) = 4$.

Supondremos en forma general $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cuando se trate de subconjuntos propios de $\mathbb{R}$ escribiremos $f : X \longrightarrow Y$.

Se acostumbra hacer referencia a $y = f(x)$ como el valor de f en x

Ejercicios 19 *Sea g la función determinada por $g(x) = \frac{2-5x+3x^2}{x+1}$. Encontrar*

$g(1) =$ $\quad$ $g(0) =$ $\quad$ $g(-2) =$

$g\left(\frac{3}{2}\right) =$ $\quad$ $g\left(\sqrt{3}\right) =$ $\quad$ $g(-1) =$

4.1. Dominio e imagen

Definición 4.1.1 *Sea f una función real. El dominio (máximo) de f es el conjunto $Dom(f) \subseteq \mathbb{R}$, determinado por:*

$$Dom(f) = \{\, x \;/\; f(x) \;\; existe \,\}$$

En el caso de funciones de la forma $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tenemos que
$Dom(f) = \{\, x \in X \;/\; f(x) \;\; existe \,\}$.

Ejemplo 37 *Consideremos la función g del ejercicio 19.*

La única manera de que la expresión racional $\frac{2-5x+3x^2}{x+1}$ se indefina (no represente un número real) es cuando $x+1=0$, dado que la división por cero no existe en los números reales. Por lo tanto

$$Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{\, -1 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq -1 \,\}$$

Puesto que, generalmente, determinamos funciones a través de expresiones matemáticas, éstas no siempre están definidas para todo número real. El dominio (máximo) de una función consiste precisamente de todos lo números reales para los que está definida la función (la expresión $f(x)$ representa un número real).

Por otro lado, las expresiones matemáticas, con las que determinamos una función, no necesariamente toman el valor de cualquier número real. La imagen de una función consiste de todos los posibles valores que puede tomar la expresión $f(x)$.

Definición 4.1.2 *Sea f una función real. La imagen (o codominio) de f, es el conjunto $Im(f)$ determinado por*

$$Im(f) = \{\, y \in \mathbb{R} \;/\; y = f(x), \;\; para\ algún \;\; x \in Dom(f) \,\}$$

En el caso de funciones de la forma $f : X \longrightarrow Y$, tenemos que
$Im(f) = \{\, y \in Y \;/\; y = f(x), \;\; para\ algún \;\; x \in Dom(f) \,\}$.

Ejemplo 38 *Sea la función $f(x) = -2x+5$.*

La expresión $-2x+5$ siempre define un número real para cualquier valor de x. Por lo que $Dom(g) = \mathbb{R}$. Para determinar $Im(f)$ nos planteamos la siguiente pregunta:

$$¿\, -1 \in Im(f) \;?$$

Como $f(x) = -2x+5$, transformamos la pregunta en:

$$¿\ la\ ecuación\ \ -2x+5=-1\ \ tiene\ solución\ ?$$

Resolviendo, encontramos que $x=3$ es una solución. Por lo tanto $-1 \in Im(f)$, pues existe $x \in Dom(f)$ tal que $f(x) = -1$.

En general, para cualquier $b \in \mathbb{R}$, la ecuación $-2x+5=b$ tiene solución dada por $x = \frac{b-5}{-2}$, por lo que

$$Im(f) = \mathbb{R}$$

Entonces la imagen de f es determinada por todos los $b \in \mathbb{R}$ para los que la ecuación $f(x) = b$ tiene solución.

Ejercicios 20 *Encontrar el dominio e imagen de las siguientes funciones*

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = x^2 - 1$
3. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
4. $f(x) = \frac{3}{x^2-1}$
5. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$
6. $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$
7. $f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{3x^2-5x+2}$
8. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$

4.1.1. La gráfica de una función

Como ya sabemos, una función es un conjunto de pares ordenados tales que sólo hay una pareja $(a\ ,\ b)$ teniendo a a como primera coordenada. Hacer la gráfica de una función es ubicar dichas parejas en el plano. Puesto que el dominio de una función generalmente será infinito, para proponer la gráfica de una función primero ubicamos en el plano cartesiano algunos puntos $(a\ ,\ b)$. Posteriormente los unimos mediante una curva suave para tener una propuesta sobre el comportamiento de todos los $(x\ ,\ f(x))$, con $x \in Dom(f)$.

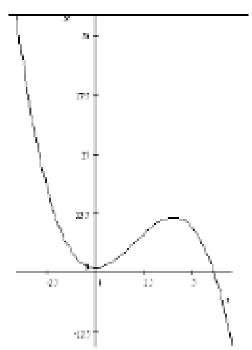


Figura 4.1:

Ejemplo 39 *Graficar* $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 1$.

x	$f(x)$
-4	$\frac{163}{3}$
-3	28
-2	$\frac{35}{3}$
-1	$\frac{10}{3}$
0	1
1	$\frac{8}{3}$
2	$\frac{19}{3}$
3	10
4	$\frac{35}{3}$
5	$\frac{28}{3}$
6	1
7	$-\frac{46}{3}$

Como ayuda para ubicar algunos puntos en el plano, generamos la tabla de arriba. Posteriormente, ubicamos en el plano los puntos $(x\,,\,f(x))$, asociados a la tabla, y los unimos mediante una curva suave (figura 4.1). De esta manera tenemos una idea gráfica sobre el comportamiento de $f(x)$ en todo un intervalo.

4.1.2. Algunas funciones conocidas

Dado que a menudo haremos referencia a funciones, debemos mencionar algunas de ellas.

La función constante

Sea $c \in \mathbb{R}$. La función constante es dada por:

$$f(x) = c$$

Es decir que f sólo toma el valor c para cualquier valor de x. Entonces tenemos

$Dom(f) = \mathbb{R}$.

$Im(f) = \{\, c\,\}$.

La función identidad

$$Id(x) = x$$

Puesto que la expresión con la que determinamos la función identidad, está definida para todo número real y ésta puede tomar cualquier valor, tenemos:

$Dom(Id) = \mathbb{R}$.

$Im(Id) = \mathbb{R}$.

La función potencia

Para $n \in \mathbb{N}$, la función potencia de x es determinada por:

$$f(x) = x^n$$

Puesto que siempre es posible elevar a la potencia n cualquier número real, tenemos que

$$Dom(f) = \mathbb{R}.$$

Sin embargo el valor de $y = f(x)$ depende de n, por ello

$$Im(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ es impar} \\ [0\,,\,\infty) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

La función polinomial

Para $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, la función polinomio de grado n es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$Dom(P) = \mathbb{R}$.

$Im(P)$ no puede ser determinada en forma general.

La función racional

Para $P(x)$ polinomio de grado n y $Q(x)$ polinomio de grado m, la función racional es determinada por:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{\, x \,/\, Q(x) = 0 \,\} = \{\, x \,/\, Q(x) \neq 0\}$.

La función valor absoluto

Recuérdese que el valor absoluto es dado por: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

De esta forma definimos la función valor absoluto

$$f(x) = |\, x|$$

$Dom(f) = \mathbb{R}$.

$Im(f) = [\, 0 \,,\, +\infty)$.

La función máximo entero

La expresión $[\, x \,]$ se define como $[\, x \,] = max\{n \in \mathbb{Z} \,/\, n \leq x\}$, el mayor de los enteros que son menores o iguales a x. De esta forma definimos la función máximo entero

$$f(x) = [\, x \,]$$

Algunos valores son: $f(1) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = 0$ y $f(-\frac{1}{2}) = -1$.

$Dom(f) = \mathbb{R}$.

$Im(f) = \mathbb{Z}$.

4.1.3. Operaciones entre funciones

Para determinar una función f se requiere de:

- Establecer $Dom(f)$ y
- Determinar la relación: expresión que asigna a cada $x \in Dom(f)$ un elemento de $Im(f)$.

Así es como establecemos la igualdad entre funciones.

Definición 4.1.3 *Decimos que $f = g$ si:*

1. $Dom(f) = Dom(g)$ *y*
2. $f(x) = g(x)$ *para cada x en el dominio.*

Debemos aclarar que las funciones determinadas por la misma expresión matemática no necesariamente son iguales, por ejemplo las funciones:

$$g : [0\ ,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 3x^2 - 1 \qquad\qquad f(x) = 3x^2 - 1$$

no son iguales pues difieren en su dominio.

Definición 4.1.4 *Las funciones suma y producto de f con g son determinadas respectivamente por:*

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

El dominio tanto de $f + g$ como de $f \cdot g$ es

$$Dom(f)\ \cap\ Dom(g)$$

Ejemplo 40 *Sean $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = \frac{x+2}{1-x^2}$. Entonces*

- $f(x) + g(x) = (3x^2 - 2x + 1) + \dfrac{x+2}{1-x^2} = \dfrac{-3x^4+2x^3+2x^2-2x+1}{1-x^2}$
- $f(x)g(x) = (3x^2 - 2x + 1) \cdot \dfrac{x+2}{1-x^2} = \dfrac{3x^3+4x^2-3x+2}{1-x^2}$

  Recuérdese que la resta es un caso particular de la suma y que la división es un caso particular del producto, por lo que tenemos definidas más operaciones:

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x^2-2x+1}{\frac{x+2}{1-x^2}} = \dfrac{(3x^2-2x+1)\cdot(1-x^2)}{x+2} = \dfrac{-3x^4+2x^3+2x^2-2x+1}{x+2}$
- $f(x) - g(x) = (3x^2 - 2x + 1) - \left(\dfrac{x+2}{1-x^2}\right) = \dfrac{3x^4-2x^3+4x^2-2x+1}{1-x^2}$.

La suma y producto de funciones se definen a partir de las operaciones en los números reales, por ello heredan sus propiedades. Sin embargo la composición es una operación propia de las funciones y está basada, además de las operaciones reales, en el proceso de sustitución.

Definición 4.1.5 *Sean las funciones* $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : Y \longrightarrow Z$*. La función composición de* g *con* f *es denotada por* $g \circ f$ *y se define como:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\ ,\ \text{para todo}\ \ x \in Dom(f)$$

Y leemos: "g *de* f*" o "*f *seguida de* g*".*

Ejemplo 41 *Sean nuevamente* $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ *y* $g(x) = \dfrac{x+2}{1-x^2}$.

- *Para obtener* $g(f(x))$ *nos apoyamos de la expresión* $g(t) = \frac{t+2}{1-t^2}$*. Haciendo la sustitución* $t = 3x^2 - 2x + 1$*, tenemos*

$$g(f(x)) = g(t) = g(3x^2 - 2x + 1) = \frac{(3x^2 - 2x + 1) + 2}{1 - (3x^2 - 2x + 1)^2}$$

- *Ahora consideramos la expresión* $f(t) = 3t^2 - 2t + 1$*, para hacer la sustitución* $t = \frac{x+2}{1-x^2}$*, con lo que obtenemos*

$$f(g(x)) = f(t) = f\left(\frac{x+2}{1-x^2}\right) = 3\left(\frac{x+2}{1-x^2}\right)^2 - 2\left(\frac{x+2}{1-x^2}\right) + 1\,.$$

En forma general $g(f(x)) \neq f(g(x))$ *ya que puede comprobarse que las expresiones algebraicas no son iguales.*

4.2. Tipos de funciones

4.2.1. Funciones pares e impares

Definición 4.2.1

1. *Una función* f *es par si* $f(-t) = f(t)$*, para todo* $t \in Dom(f)$*.*

2. *La función* g *es impar si* $g(-t) = -g(t)$*, para todo* $t \in Dom(f)$*.*

Cuando se habla de funciones pares (o impares), se supone un dominio simétrico. Es decir: si $t \in Dom(f)$, entonces $-t \in Dom(f)$.

Las funciones constante y valor absoluto son ejemplos de funciones pares, mientras que la función identidad es un ejemplo de función impar. En forma general para n impar, $f(x) = x^n$ es una función impar. Por otro lado, para n par, $f(x) = x^n$ es una función par.

4.2.2. Funciones periódicas

Definición 4.2.2 *Se dice que la función* f *es periódica si existe* $\tau \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x+\tau) = f(x)\ , \ \textit{para todo} \ x \in Dom(f)$$

Al menor de los $\tau > 0$ que satisface la definición, se le llama periodo de f.

Cuando hablemos de funciones trigonométricas, daremos ejemplos de estas funciones.

4.2.3. Funciones invertibles

Definición 4.2.3 *Sean* X *e* Y *subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *y* $f : X \longrightarrow Y$.

1. *Se dice que* f *es una función inyectiva (uno a uno) si y sólo si para cada* $x_1, x_2 \in Dom(f)$, *se satisface:*
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

2. *Se dice que* f *es sobreyectiva (sobre) si y sólo si*
$$\textit{Para cada } y \in Y, \textit{ existe } x \in X \textit{ tal que } f(x) = y$$

3. *Se dice que* f *es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Aunque siempre es necesario demostrar la propiedad que se afirma. Una manera de visualizar gráficamente la definición anterior es de la siguiente manera.

- Una función es inyectiva recta horizontal intersecta en a lo más un punto a la gráfica de la función.
- Una función es sobreyectiva si toda recta horizontal intersecta en al menos un punto a la gráfica de la función.
- Consecuentemente, en una función biyectiva: toda recta horizontal se intersecta con la gráfica en un único punto.

Definición 4.2.4 *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función biyectiva. Entonces la función inversa de* f *es la función* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ *tal que*

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

Si f^{-1} existe, entonces

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

que corresponden a las funciones: identidad en X ($Id_X : X \longrightarrow X$) e identidad en Y ($Id_Y : Y \longrightarrow Y$).

Ejemplo 42 *Considérese la función* $f(x) = x^2$. *Recordemos que la raíz cuadrada es definida por:*

$$\sqrt{x} = y \iff y^2 = x$$

de donde $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, *pues* $\sqrt{x^2} = x$.

Puesto que tanto el dominio como la imagen de $g(x) = \sqrt{x}$ *es el conjunto* $[0\ ,\ \infty)$, *consideramos a la función* $f(x) = x^2$ *con el mismo dominio e imagen para tener una función biyectiva.*

Teorema 4.2.5 *Sea* $f : X \longrightarrow Y$. *Si existe una función* $g : Y \longrightarrow X$ *tal que:*

$$g(f(x)) = x \quad y \quad f(g(y)) = y$$

entonces f *es invertible y* $f^{-1} = g$.

Demostración. Haremos una demostración directa, suponiendo que existe una función g con las propiedades antes descritas. Iniciamos demostrando que f es inyectiva

$g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$ hipótesis

Supóngase que $f(x) = f(t)$.

$g(f(x)) = g(f(t))$ Aplicando g

$x = t$ por hipótesis

Entonces f es inyectiva.

Ahora supóngase que $b \in Y$, arbitrario.

Tomando $x = g(b)$

entonces $f(x) = f(g(b)) = b$.

Entonces f es biyectiva

Por lo tanto f y g satisfacen la definición de función inversa, 4.2.4.

Ejemplo 43 *Considérese la función* $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$. *Para encontrar su inversa, nos proponemos buscar la función* $g(x)$ *del teorema 4.2.5, como sigue:*

- *Primero planteamos la ecuación* $y = f(x)$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

- *Luego procedemos a despejar* x *(en términos de* y *)*

  $y(x + 2) = x^2 - 1$

  $x^2 - yx = 1 + 2y$

  $(x - \frac{y}{2})^2 = 1 + 2y + \frac{y^2}{4}$ *completando trinomio cuadrado perfecto*

  $x - \frac{y}{2} = \sqrt{1 + 2y + \frac{y^2}{4}}$ *sólo nos quedamos con una raíz (la positiva).*

  $x = \frac{y}{2} + \sqrt{1 + 2y + \frac{y^2}{4}}$

- *Así, puede comprobarse que*

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1 + 2x + \frac{x^2}{4}}$$

El paso donde elegimos sólo una de las dos posibles raíces, es para que se pueda definir la función g *(del teorema 4.2.5). Al mismo tiempo se restringe un dominio para que* f *sea biyectiva.*

4.3. Funciones trascendentes

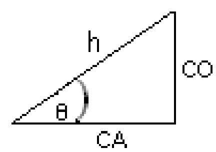
Definición 4.3.1 *Decimos que la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es algebraica si puede ser determinada mediante una expresión que únicamente involucra una o varias de las operaciones: suma, resta, producto, división, potenciación y extracción de raíces, en un número finito de pasos.*

Hasta ahora, las funciones con las que hemos tratado son algebraicas excepto, quizá, la función máximo entero $f(x) = [x]$.

Definición 4.3.2 *Se dice que* f *es una función trascendente si no es una función algebraica.*

Ejemplos de funciones trascendentes son las funciones trigonométricas y exponenciales que, dada su importancia, requieren un estudio a parte.

4.3.1. Funciones trigonométricas



En el triángulo rectángulo nos fijamos en uno de sus ángulos agudos. Con base en el ángulo θ, seleccionado, fijamos el cateto opuesto (no interviene en la formación de θ) y el cateto adyacente (junto con la hipotenusa forman el ángulo θ). Las funciones trigonométricas del ángulo θ son:

Seno	$sen\theta = \frac{CO}{h}$	Coseno	$cos\theta = \frac{CA}{h}$
Tangente	$tan\theta = \frac{CO}{CA}$	Cotangente	$cot\theta = \frac{CA}{CO}$
Secante	$sec\theta = \frac{h}{CA}$	Cosecante	$csc\theta = \frac{h}{CO}$

En cada caso, el ángulo θ es el argumento y las funciones se leen como Seno de theta, Coseno de theta, Tangente de theta, Cotangente de theta, Secante de theta y Cosecante de theta, respectivamente. Es costumbre no escribir entre paréntesis el argumento, pero cuando sea necesario, para evitar confusión, escribiremos $sen(\theta)$ para indicar claramente cuál es el argumento (variable independiente).

Con respecto al argumento, tenemos principalmente dos formas de medir.

Definición 4.3.3

1. *Un grado es la unidad de medida de un ángulo central (con vértice en el centro de una circunferencia) que consiste en una* $\frac{1}{360}$ *parte de la circunferencia.*

2. *Un radián es la medida de un ángulo central cuyos lados cortan un arco con longitud igual al radio de la circunferencia, por ello se dice que la medida de este ángulo es un radián.*

Otra unidad de medida es dada por los grados centesimales o grados centígrados, que se obtienen de partir en 400 partes iguales la circunferencia. De esta forma cada cuadrante del plano cartesiano mide 100 grados. Aunque no usaremos esta unidad de medida, la mencionamos ya que aparece como opción en las calculadoras científicas.

Si $< AOB = \theta^o$ y $< AOB = x$ radianes, entonces sabiendo que π radianes equivale a 180^o, tenemos:

$$x = \frac{\pi}{180}\,\theta \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{180}{\pi}\,x$$

La forma positiva de construir un ángulo es, partiendo de lado inicial, girando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Valores de las funciones trigonométricas

Empezaremos obteniendo los valores de las funciones trigonométricas de ángulos construibles, mediante las siguientes figuras.

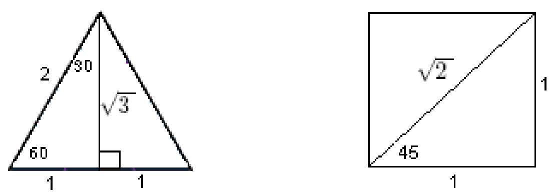


Figura 4.2: Funciones trigonométricas de ángulos conocidos

En el triángulo equilatero con lados de magnitud 2, parte izquierda de la figura 4.2, todos sus ángulos son iguales a 60^o. Trazamos una ortogonal a la base obteniendo dos triángulos rectángulos congruentes, con ángulos agudos de 60^o y 30^o. Por lo que:

$$\begin{array}{llll}
sen\,60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} & cos\,60^o = \frac{1}{2} & sen\,30^o = \frac{1}{2} & cos\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
tan\,60^o = \sqrt{3} & cot\,60^o = \frac{1}{\sqrt{3}} & tan\,30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} & cot\,30^o = \sqrt{3} \\
sec\,60^o = \frac{2}{\sqrt{3}} & csc\,60^o = \frac{2}{\sqrt{3}} & sec\,30^o = \frac{2}{\sqrt{3}} & csc\,30^o = \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{array}$$

Por otro lado, en el cuadrado con lados de magnitud 1, parte derecha de la figura 4.2, trazamos una diagonal con la que obtenemos dos triángulos rectángulos isóceles, con ángulos agudos iguales a 45^o. Así, las funciones trigonométricas valuadas en un ángulo de 45^o son:

$$\begin{array}{ll}
sen\,45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} & cos\,45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
tan\,45^o = 1 & cot\,45^o = 1 \\
sec\,45^o = \sqrt{2} & csc\,45^o = \sqrt{2}
\end{array}$$

Puesto que tenemos la relación

$$\pi \ : \ 180^o$$

concluimos que tenemos los valores de las funciones trigonométricas con argumentos en los números reales $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{4}$, correspondientes a 60^o, 30^o y 45^o respectivamente.

A diferencia de los argumentos en grados que se presentan en sistema sexagesimal, los radianes se expresan como números reales (en sistema decimal) y dado que estudiamos funciones reales, es conveniente considerar los argumentos en radianes, aunque algunas veces hablemos por familiaridad en grados.

Hasta ahora, tenemos los valores de las funciones trigonométricas de algunos ángulos agudos, sin embargo como ya sabemos, la medida de un ángulo puede ser mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$ o menor que cero. Para definir las funciones trigonométricas en el dominio de los números reales empezaremos con las funciones Seno y Coseno, posteriormente generalizaremos a todas las funciones trigonométricas.

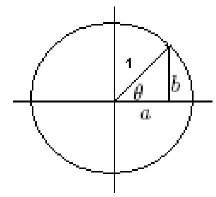


Figura 4.3:

En el plano cartesiano, figura de la derecha, nos fijamos en la circunferencia unitaria (de radio 1) con centro en el origen. El ángulo θ se construye tomando el origen como vértice, girando el radio en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj) y teniendo siempre la parte positiva del eje horizontal como lado inicial. Partiendo del punto de intersección entre el radio y la circunferencia, proyectamos una perpendicular al eje horizontal, con lo que contruimos un triángulo rectángulo.

De esta forma $cos\,\theta = a$ y $sen\,\theta = b$, es decir que ahora el valor $cos\,\theta$ es representado por el número real a (punto de intersección con el eje horizontal). En forma similar, el valor $sen\,\theta$ se representa con el número real b (punto de intersección con el eje vertical). Siguiendo este procedimiento encontramos que

$$sen\,\frac{\pi}{2} = 1\ ,\ cos\,\frac{\pi}{2} = 0\ ,\ sen\,0 = 0 \ \text{ y } \ cos\,0 = 1$$

¿Qué pasa con ángulos mayores a 90^o ?

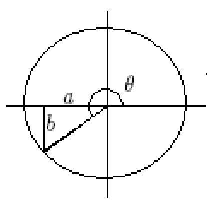


Figura 4.4:

Siguiendo el procedimiento planteado, proyectamos el lado final del ángulo con el eje horizontal para obtener un triángulo rectángulo. Pero ahora nos fijamos no sólo en magnitud sino también en la posición del punto de intersección en el plano cartesiano (eje real: horizontal o vertical). Por lo tanto

$$sen\,\pi = 0\ ,\ cos\,\pi = -1\ ,\ sen\,\frac{3\pi}{2} = -1 \ \text{ y } \ cos\,\frac{3\pi}{2} = 0$$

Observación 4.3.4

- *Para ángulos mayores a 2π, tenemos (figura 4.4)*

$$sen(x + k2\pi) = sen\,x \quad y \quad cos(x + k2\pi) = cos\,x\ , \quad con \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Por lo que las funciones Seno y Coseno son periódicas, con $\tau = 2\pi$.

- *Como hemos visto, las funciones Seno y Coseno están definidas para todo número real. Entonces*

$$Dom(sen) = \mathbb{R} \quad y \quad Dom(cos) = \mathbb{R}$$

- *Los valores que pueden tomar* $\cos x$ *y* $\operatorname{sen} x$ *están limitados por los valores que puedan tener* a *y* b *respectivamente (figuras 4.3 y 4.4). Por lo tanto*

$$Im(sen) = Im(cos) = [-1\ ,\ 1]$$

Para el caso de ángulos negativos (construidos en el sentido de las manecillas del reloj) seguimos el mismo procedimiento; proyectar una perpendicular al eje horizontal desde el punto de intersección, de tal forma que tenemos los valores de $sen\,x$ y $cos\,x$ para ángulos negativos.

- La función seno es impar, ya que $sen(-\theta) = -sen\,\theta$, para todo θ.
- La función coseno es par, pues $cos(-\theta) = cos\,\theta$, para todo θ.

Continuando con el procedimiento en el plano cartesiano, tenemos las funciones trigonométricas restantes

$$tan\,\theta = \tfrac{b}{a} \qquad cot\,\theta = \tfrac{a}{b}$$
$$sec\,\theta = \tfrac{1}{a} \qquad csc\,\theta = \tfrac{1}{b}$$

Identidades en el círculo unitario

Los primeros objetivos de las identidades son: obtener los valores de las funciones trigonométricas de otros ángulos a partir de los ya conocidos y simplificar expresiones trigonométricas.

Afirmación 6 *Puesto que* $cos\,\theta = a$ *y* $sen\,\theta = b$*, figura 4.3, tenemos las siguientes identidades*

$$tanA = \tfrac{senA}{cosA} \qquad cotA = \tfrac{cosA}{senA}$$
$$secA = \tfrac{1}{cosA} \qquad cscA = \tfrac{1}{senA}$$

De esta forma observamos que las funciones $tan\,x$, $cot\,x$, $sec\,x$, y $csc\,x$ están definidas en aquellos x para los que el cociente correspondiente es un número real. Por lo tanto

- $Dom(tan) = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; cos\,x \neq 0 \,\} = \mathbb{R} \setminus \{\, \frac{(2k+1)}{2}\,\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \,\}$

  Aunque es costumbre hacer referencia a la función Tangente con dominio dado por el intervalo $[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}]$, ya que con ello se consigue biyectividad.

  $Im(tan) = \mathbb{R}$

- $Dom(cot) = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; sen\,x \neq 0 \,\} = \mathbb{R} \setminus \{\, k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \,\}$

  $Im(cot) = \mathbb{R}$

- $Dom(sec) = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; cos\,x \neq 0 \,\} = \mathbb{R} \setminus \{\, \frac{(2k+1)}{2}\,\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \,\}$

  $Im(sec) = (-\infty\ ,\ -1) \cup [1\ ,\ \infty)$

- $Dom(csc) = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; sen\,x \neq 0 \,\} = \mathbb{R} \setminus \{\, k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \,\}$

$Im(sec) = (-\infty \, , \, -1) \cup [1 \, , \, \infty)$

Recordemos que nuestro procedimiento, figura 4.3, parte del círculo unitario, por lo que $a^2 + b^2 = 1$. Así, obtenemos la siguiente identidad

$$sen^2 A + cos^2 A = 1$$

Aunque parezca innecesario, aclaremos que la expresión $sen^2 x$ significa $(sen\, x)^2$, es decir el cuadrado de la función Seno. Notación análoga se acostumbra para las restantes funciones trigonométricas.

En consecuencia, tenemos las siguientes identidades.

Ejercicios 21 *Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.*

1. $1 + tan^2 A = sec^2 A$
2. $1 + cot^2 A = csc^2 A$

Más identidades trigonométricas

Otras identidades trigonométricas se obtienen pensando en el plano cartesiano en general. Antes debemos relacionar los puntos del plano (de cualquier magnitud) con las funciones trigonométricas.

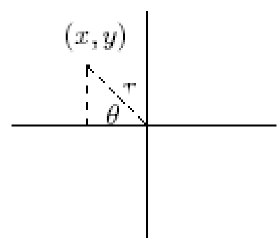


Figura 4.5: Plano cartesiano

Proyectando una ortogonal al eje horizontal desde el punto $(x \, , \, y)$, ver figura 4.5, construimos el triángulo rectángulo con $r^2 = x^2 + y^2$, cateto adyacente $|x|$ y cateto opuesto $|y|$ en general. Las coordenadas pueden ser dadas por:

$$(x \, , \, y) = (r cos\, \theta \, , \, r sen\, \theta)$$

la parte 1 del siguiente teorema es una generalización del teorema de Pitágoras y puede ser demostrado gracias a la fórmula de distancia entre dos puntos, mientras que la parte 2 establece el valor de la función Coseno en la suma de ángulos. Dejamos la demostración como ejercicio para el lector.

Teorema 4.3.5

1. ***L*ey de cosenos:** *en cada triángulo con lados de magnitud a, b y c, con c el lado mayor, se tiene:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\, \theta$$

2. ***C*oseno de la suma:** *para todo par de ángulos α y β, se tiene:*

$$cos(\alpha + \beta) = cos\, \alpha \cdot cos\, \beta \; - \; sen\, \alpha \cdot sen\, \beta$$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos más propiedades:

Ejercicios 22 *Demostrar las siguientes identidades*

1. $cos(A-B) = cos\,A \cdot cos\,B \;+\; sen\,A \cdot sen\,B$
2. $cos(\frac{\pi}{2} - A) = sen\,A$
3. $sen(\frac{\pi}{2} - A) = cos\,A$
4. $sen(A+B) = sen\,A \cdot cos\,B \;+\; sen\,B \cdot cos\,A$
5. $sen(A-B) = sen\,A \cdot cos\,B \;-\; sen\,B \cdot cos\,A$
6. $cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+cos\,A}{2}}$.

4.3.2. Funciones trigonométricas inversas

Debido a su carácter periódico, las funciones trigonométricas no son biyectivas. Sin embargo podemos restringir a un dominio de biyectividad y estudiar sus funciones inversas, definición 4.2.4.

Definición 4.3.6 *Las funciones trigonométricas inversas son dadas por:*

1. ***S*eno inverso**: $sen^{-1}x = y \iff sen\,y = x$

   $Dom(sen^{-1}) = [-1\,,\,1]$, $Im(sen^{-1}) = [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$
2. ***C*oseno inverso**: $cos^{-1}x = y \iff cos\,y = x$

   $Dom(cos^{-1}) = [-1\,,\,1]$, $Im(cos^{-1}) = [0\,,\,\pi]$
3. ***T*angente inversa**: $tan^{-1}x = y \iff tan\,y = x$

   $Dom(tan^{-1}) = \mathbb{R}$, $Im(tan^{-1}) = [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$
4. ***C*otangente inversa**: $cot^{-1}x = y \iff cot\,y = x$

   $Dom(cot^{-1}) = \mathbb{R}$, $Im(cot^{-1}) = (0\,,\,\pi)$
5. ***S*ecante inversa**: $sec^{-1}x = y \iff sec\,y = x$

   $Dom(sec^{-1}) = [1\,,\,\infty)$, $Im(sec^{-1}) = [0\,,\,\frac{\pi}{2})$
6. ***C*osecante inversa**: $csc^{-1}x = y \iff csc\,y = x$

   $Dom(csc^{-1}) = [1\,,\,\infty)$, $Im(csc^{-1}) = (-\frac{\pi}{2}\,,\,0]$.

Es necesario aclarar, aunque es una notación comúnmente usada, que la expresión $sen^{-1}x$ (de función inversa) no está representando a la operación inverso multiplicativo $(sen\,x)^{-1} = \frac{1}{sen\,x}$, que coincide con la función $csc\,x$. En caso de confusión, puede usarse la notación $arcsen\,x$, $arccos\,x$, $arcsec\,x$, $arctan\,x$, $arccot x$, $arcsec x$ y $arccsc x$ para hacer refencia a las funciones Arco seno, Arco coseno, Arco tangente, Arco cotangente, Arco secante y Arco cosecante, que es otra manera en que se conocen las funciones trigonométricas inversas.

Aunque en la definición 4.3.6 ya incluimos su imagen, obtendremos algunos valores con la finalidad de familiarizarnos en la forma de operar con las funciones trigonométricas inversas.

Puesto que $sen\,\frac{\pi}{2} = 1$, concluimos que $sen^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$. También

$sen^{-1}(0) = 0$, pues $sen\, 0 = 0$

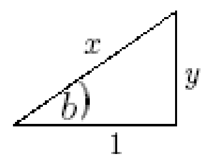
$sen^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, pues $sen\, \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$, pues $tan\, \frac{\pi}{4} = 1$.

Ejemplo 44 *Demostrar que* $tan(sec^{-1}x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Por definición tenemos que $sec^{-1}x = b \iff sec\, b = x$.

De la igualdad $sec\, b = \frac{x}{1}$ *, construimos el siguiente triángulo*



Por el teorema de Pitágoras, el cateto opuesto se obtiene como $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

Entonces $tan(sec^{-1}x) = tan\, b = \frac{y}{1} = \sqrt{x^2 - 1}$.

4.3.3. La función exponencial

Definición 4.3.7 *Sea* a *un número positivo. La función exponencial de base* a *es dada por*

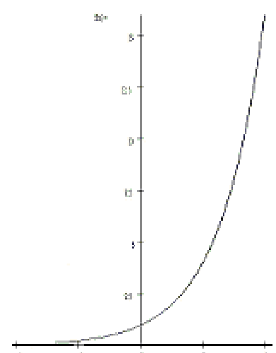
$$f(x) = a^x$$

Por propiedades conocidas de exponentes, para todo $a > 0$, tenemos

$$Dom(f) = \mathbb{R}\,, \quad \text{e} \quad Im(f) = (0\,,\,\infty)$$

En forma general se tiene: $f(0) = 1$, $f(1) = a$, $f(2) = a^2$ y $f(-1) = \frac{1}{a}$.

Ejemplo 45 *Sea* $f(x) = 2^x$. *Entonces la gráfica de* f *tiene la forma:*



Heredadas de los números reales tenemos las siguientes propiedades:

OBSERVACIÓN 4.3.8 *Para* $a > 0$, *se tiene*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

La función exponencial natural

Definición 4.3.9 *La función exponencial natural, o simplemente exponencial, es determinada por*

$$f(x) = e^x$$

donde $e = 2.71828182845905\ldots$ *es un número irracional.*

Hasta ahora, todas las propiedades de a^x son aplicables a la función exponencial $f(x) = e^x$. Posteriormente encontraremos algunas diferencias significativas con la función exponencial de base a, así como su importancia.

4.3.4. La función logaritmo

Definición 4.3.10 *Sea* $a > 0$. *Entonces el logaritmo de base* a *es la inversa de la función exponencial de base* a. *Es decir*

$$log_a x = y \iff a^y = x$$

$Dom(log_a) = (0\,,\,\infty)$, $Im(log_a) = \mathbb{R}$.

Para el caso $a = 10$, la función log_{10} se conoce como logaritmo decimal, o vulgar y es de uso común, debido a que la base decimal es precisamente nuestro sistema de numeración.

TEOREMA 4.3.11 *Para* $a > 0$, *tenemos:*

1. $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
2. $log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$
3. $log_a(x^n) = n \cdot log_a(x)$

DEMOSTRACIÓN. Son consecuencia de las propiedades de potencia y de la definición de logaritmo.

Ejemplo 46

- $log_{10}(1) = 0$ *pues* $(10)^0 = 1$
- $log_2(\frac{1}{2}) = -1$ *pues* $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

4.3.5. La función logaritmo natural

La inversa de la función exponencial se conoce como logaritmo natural (o simplemente logaritmo), se denota por $ln(x)$ y se define por:

$$ln(x) = y \iff e^{y} = x$$

con base en su definición tenemos que

$$ln(e^{x}) = x \quad \text{y} \quad e^{(lnx)} = x$$

Por supueato que las propiedades dadas en el teorema 4.3.11 son aplicables a la función logaritmo (caso particular $a = e$).

Ejemplo 47 *Resolver la ecuación:*

$$ln\left[y - \sqrt{y+9}\right] = ln(9) - ln(3)$$

Solución.

- $ln\left[y - \sqrt{y+9}\right] = ln(3)$ *teorema 4.3.11*
- $e^{ln\left[y-\sqrt{y+9}\right]} = e^{ln3}$ *aplicando exponencial en ambos lados*
- $y - \sqrt{y+9} = 3$ *definición de* $ln(x)$

  resolviendo para y
- $y - 3 = \sqrt{y+9}$
- $y^2 - 6y + 9 = y + 9$
- $y^2 - 7y = 0$
- $y(y - 7) = 0$

  Entonces $y = 0$ *e* $y = 7$ *son las soluciones.*

Bibliografía

[1] Angoa J. y otros, *Matemáticas elementales*, Textos Científicos - BUAP.

[2] Antoyán A., Medina L., Wisniewski P., *Problemario de precálculo*, Thomson.

[3] Benítez René, *Cálculo diferencial para ciencias básicas e ingeniería*, Trillas.

[4] Chartrand G., Polimeni A., Zhang P., *Mathematical proofs*, Addison Wesley.

[5] De Gortari Elí, *Elementos de lógica matemática*, Océano.

[6] Jiménez José A., *Matemáticas para la computación*, Alfaomega.

[7] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, Nort-Holland.

[8] Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic*.

[9] Suppes P., Hill S., *Introducción a la Lógica matemática*, Reverté.

[10] Portal Educativo,*Ciencia matemática*, www.cienciamatematica.com.