República Bolivariana de Venezuela
Universidad de Carabobo
Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología
Departamento de Matemáticas

Un estudio comparativo entre Espacios Vectoriales de Dimensión Finita e Infinita

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo por el Br. Ojeda A. Juan N. para optar al título de Licenciado en Matemática

Tutor: Prof. Nelson C. Hernández.

Valencia-Venezuela

Mayo de 2011

República Bolivariana de Venezuela

Universidad de Carabobo

Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología

Departamento de Matemáticas

Un estudio comparativo entre Espacios Vectoriales de Dimensión Finita e Infinita

Trabajo de Especial de Grado

Como requisito para obtener el título de Licenciado en Matemática

Tesista: Ojeda A. Juan N.

Tutor: Prof. Hernández Nelson C.

Jurado: Prof. Montilla Orestes

Jurado: Prof. Rodríguez Luis

Naguanagua-Venezuela, 2011

Índice general

Agradecimientos

A mis padres, quienes han sabido formarme con buenos sentimientos, hábitos y valores, lo cual me ha ayudado a salir adelante buscando siempre el mejor camino, y por todo lo que me han dado en esta vida, especialmente por sus sabios consejos y por estar a mi lado en los momentos difíciles. A mi padre que siempre y de manera constante me repite que *para alcanzar el éxito se requiere de tres cosas: voluntad, valor y decisión*, además me dice que *Caer está permitido. ¡Levantarse es obligatorio!*.

A mi hermana Anais, quien me ha acompañado en silencio con una comprensión a prueba de todo.

Quiero darles las gracias a todos los profesores del Departamento de Matemática que me educaron y que de una u otra manera formaron y me ayudaron a evolucionar en el pequeño mundo de las matemáticas.

En particular a mi tutor de tesis, guía y gurú, el profesor Nelson Hernández, quien me orientó durante toda la carrera y especialmente por sus consejos, correcciones, consultas durante el tiempo que duró esta tesis y por tener la paciencia ante mis dudas de novato y por escuchar atentamente los problemas que a lo largo de esta tesis surgieron.

Como expresaba Gladys Bronwyn Stern: *La gratitud en silencio no sirve a nadie*, entonces es importante agradecerle a Dayana, pues como dicen que detrás de un no

tan gran hombre hay una gran mujer, gracias a Dayana, por estos nueves años y todo lo que me enseñó en ellos: tuve mucha suerte por haberle conocido.
A mi tía Mary y Aracelis, por estar siempre dispuestas a ayudarme.
A mi abuela Carmen, por el apoyo incondicional que me dio cuando lo necesité. Y por enseñarme que *la generosidad no consiste en dar mucho sino en dar a tiempo.*
A mi niña, simplemente por ser como es. Con todas su manías y defectos, con todas sus virtudes y bellezas. Gracias por caminar a mi lado durante todo este pequeño tiempo. También por enseñarme que no hay límites, que lo que me proponga lo puedo lograr y que sólo depende de mi. Gracias también a tu familia.
Agradezco a mis compañeros de estudios, porque la constante comunicación con ellos ha contribuido en gran medida a transformar y mejorar mi forma de actuar en mis estudios, especialmente a aquellos que me brindaron cariño, comprensión y apoyo, dándome con ello, momentos muy gratos.
Finalmente quiero agradecer a todas aquellas personas que de una u otra manera hicieron posible la terminación de este trabajo de tesis y que no las mencioné, gracias a todos.

Introducción

La presente investigación se refiere al tema de los espacios vectoriales, que debido al número cardinal (ya sea finito o infinito) asociado a una base del espacio vectorial pueden ser clasificados como espacios vectoriales de dimensión finita (si el cardinal asociado a la base es finito) o infinito dimensional (en otro caso).
Nuestro objetivo a lo largo del presente trabajo es estudiar de manera detallada las similitudes y diferencias presentadas entre los espacios antes mencionados. Desde el punto de vista antes citado podemos afirmar que de este trabajo se deriva la clasificación de las propiedades de los espacios vectoriales en tres grandes grupos:

1. Aquellas que son validas para espacios vectoriales cualesquiera, independientemente de la cardinalidad de sus bases.

2. Las que son validas únicamente para espacios vectoriales de dimensión finita.

3. Las que son validas sólo para espacios vectoriales infinito dimensionales.

No ahondaremos ejemplificando las propiedades citadas en 1), 2) y 3); pues éstas pueden ser encontradas, con lujo de detalle, en los capítulos que componen el presente trabajo.
Un hecho notorio que se percibe al revisar los textos clásicos de Álgebra Lineal (a nivel de licenciatura) es que se omiten resultados importantes cuando el espacio

vectorial posee una base de cardinalidad infinita. En particular, no se introduce el concepto de dimensión para esos casos. En este trabajo realizaremos una actualización y revisión del teorema de Löwig (si $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ son dos bases con cardinales infinitos asociadas a ellas, entonces estas deben ser equipotentes), como consecuencia del anterior teorema puede introducirse la noción de dimensión para el caso particular cuando el espacio vectorial tiene una base de Hamel infinita (en realidad, en este caso, la dimensión se corresponderá con un cardinal infinito).

En base a lo antes expresado, se reformulará la noción de bases ordenadas y coordenadas para espacios vectoriales de tal forma que se adapte a la perfección para cualquier dimensión del espacio (finita o infinita).

Evidentemente para sustentar un estudio como el que aquí presentamos, se requirió el estudio de algunos aspectos de la teoría de conjunto (especialmente la aritmética transfinita), cuyos aspectos más básicos presentamos aquí en un apéndice.

Una duda natural que surge al leer la presente introducción es la pertinencia o importancia de un trabajo como este y la respuesta obvia es que los espacios vectoriales de dimensión infinita se presentan más frecuentemente en diversas áreas del quehacer matemático de lo que usualmente se percibe (por ejemplo: espacios vectoriales topológicos, análisis funcional y espacios de Hilbert, ecuaciones diferenciales, teoría de números algebraicos, entre otros).

El contenido de este trabajo está estructurado en cuatro capítulos y dos apéndices. En el primer capítulo se presenta una breve reseña histórica acerca de la evolución de las ideas relacionadas con los espacios vectoriales y su vinculación con las diferentes ramas de las matemáticas. Hemos incluido este capítulo para presentar una perspectiva más clara de la interacción entre las nociones algebraicas (en nuestro caso especial el Álgebra Lineal) y otras áreas de las matemáticas.

En el capítulo dos hemos presentado un compendio resumido de los resultados fundamentales que se estudian en un primer curso de licenciatura en matemáticas de Álgebra Lineal; evidentemente no se presupone originalidad en ninguno de los resultados presentados y la razón primordial de su inclusión es hacer el trabajo autocontenido y presentar este material de forma ordenada de acuerdo a la complejidad de los tópicos estudiados.

El capítulo tres es el más importante de este trabajo y allí se hace un análisis exhaustivo de los espacios vectoriales infinito dimensionales y se hace un estudio comparativo con los espacios vectoriales de dimensión finita, como se especificó al comienzo de esta introducción.

Finalmente, en el capítulo cuatro se presentan algunos temas y problemas abiertos que no fueron abordados en este trabajo y que podrían servir de punto de partida de otros trabajos de investigación.

Terminaremos con unas palabras finales relacionados con la notación. Usaremos el clásico rectángulo $\square$ (introducido por Paul Halmos) para indicar el fin de la demostración de un teorema o proposición y el rombo $\diamond$ para indicar el final de una parte de una demostración.

El uso de conectivos y cuantificadores tendrán el significado usual (ver [12]) y el resto de la notación será la estándar (ver [8] y [21]).

Capítulo 1

Historia de los Espacios Vectoriales

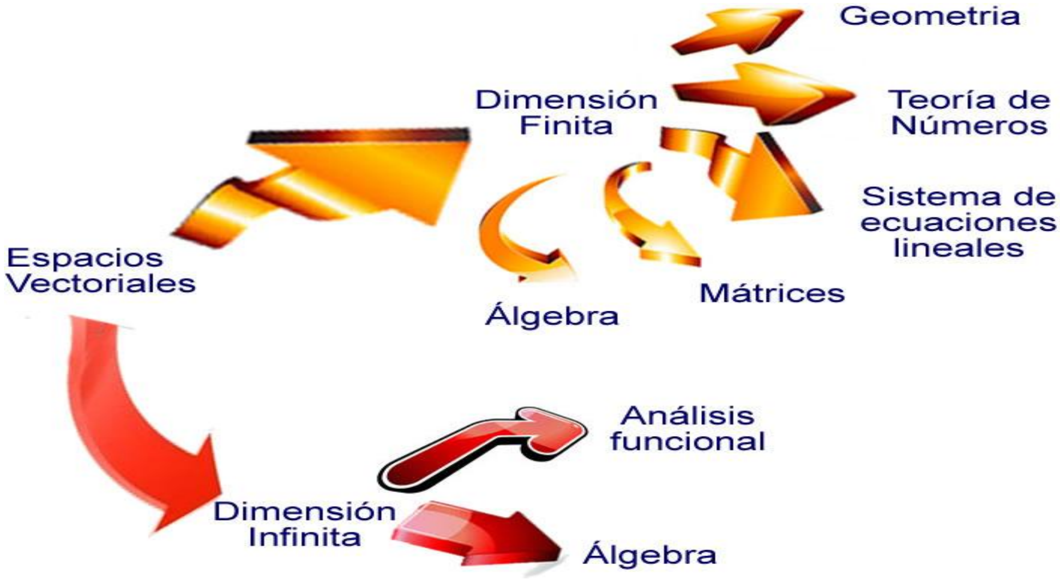
El Álgebra Lineal es una rama de la matemática que se encarga de estudiar temas, tales como: matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y las transformaciones lineales (homomorfismo entre espacios vectoriales), entre otros tópicos.

Considerando que la información histórica debe ser parte de la formación matemática, en este capítulo se realizará un análisis del desarrollo del concepto de espacio vectorial, tanto de dimensión finita, como los que poseen dimensión infinita, desde el comienzo de sus estudios hasta la actualidad.

Los espacios vectoriales hoy en día poseen una amplia aplicación en diversas áreas de las matemáticas: ecuaciones diferenciales, proporcionan el marco para resolver ecuaciones en derivadas parciales, geometría, espacios vectoriales topológicos, teoría de números algebraicos, investigación de operaciones y análisis funcional, entre otros. Además, son de vital importancia en la física, graficación por computadoras e ingeniería.

Históricamente el desarrollo de la definición y teoría moderna de los espacios vectoriales se conocen a partir del siglo XVII y aparecen en distintas ramas de la matemática, entre las cuales podemos mencionar: teoría de números, geometría, álgebra abstracta (grupos, anillos, cuerpos, módulos y teoría de Galois), matrices, sistemas de ecuaciones lineales, análisis (ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales y análisis funcional) y también en física e ingeniería.

La siguiente gráfica ilustra el desarrollo de los espacios vectoriales:



Se analizará a continuación el aporte de cada una de las áreas anteriormente nombradas al desarrollo de los espacios vectoriales como teoría matemática:

1.1. Geometría

La geometría cartesiana fue introducida por los matemáticos Pierre de Fermat[1] (1601-1665) y René Descartes[2] (1596-1650). Fermat independientemente de Descartes descubrió el principio fundamental de la geometría cartesiana donde se

[1]Jurista y matemático francés. Reconocido por los trabajos realizados en teoría de números, en particular, por el último teorema de Fermat (demostrado en 1995). Propuso ideas importantes para la teoría de probabilidades. Entre sus descubrimientos podemos mencionar: Espiral de Fermat, fórmula general para calcular números amigos, teorema sobre la suma de dos cuadrados, pequeño teorema de Fermat y el principio de Fermat.

[2]Filósofo, matemático y científico francés. En *La géométrie* incluye aplicaciones del álgebra a la geometría, de la cual ahora tenemos la geometría cartesiana. Entre sus obras encontramos: *Le Monde, ou Traité de la Lumière* (La Luz o Tratado del Mundo y El Hombre), *Discours de la*

aplican los métodos algebraicos a la geometría. Es importante hacer notar que lo que se publica por primera vez como *geometría cartesiana* (geometría analítica) aparece en el apéndice al *Discurso del método* publicado por René Descartes en 1637 (se publicó de forma anónima en Leiden, Holanda), aunque bien, se conoce que Fermat ya conocía y utilizaba los métodos antes de la publicación realizada por Descartes. Es a partir de esos tiempos donde surge la noción de vector dentro de lo que se conoce como Geometría Cartesiana.

Sin embargo, es posible considerar el comienzo del concepto vectorial por las investigaciones realizadas por Bernard Bolzano[3] (1781-1848) el cual publica en 1804, un documento que lleva por nombre: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargoemetrie* (Consideraciones de algunos aspectos de Geometría Elemental) en donde realiza un estudio exhaustivo de la fundamentación de la geometría elemental. Se analiza en este trabajo los elementos indefinidos: puntos, rectas y planos; y define operaciones sobre ellos. Con este estudio Bolzano pretendía axiomatizar la geometría y entre este objetivo encontró darle forma de estructura a los elementos del plano y el espacio. Así se abre paso considerablemente a la noción abstracta del concepto de espacio vectorial.

Otro elemento destacado son las coordenadas baricéntricas creadas por August Ferdinand Möbius[4] (1790-1868) en 1827, en su trabajo: *Der barycentrische*

---

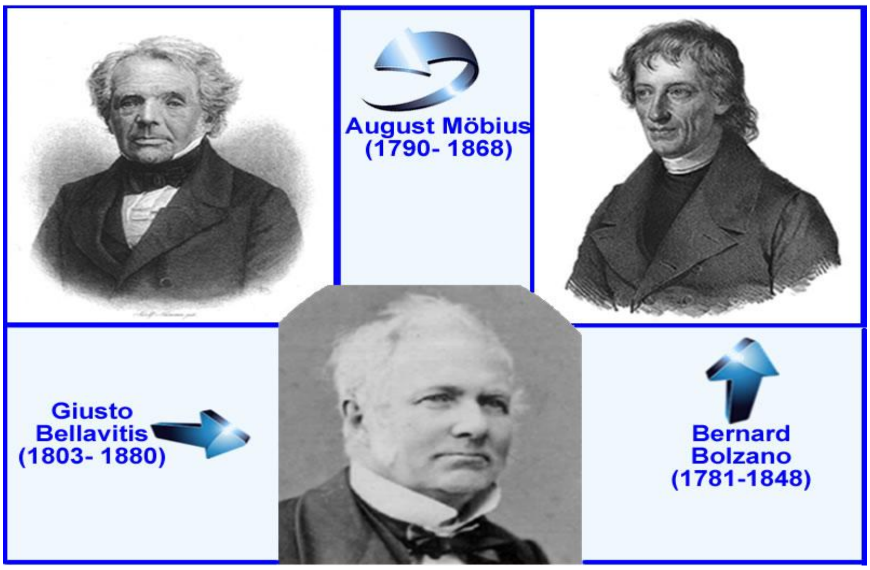
méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences (Discurso del método para dirigir bien la razón y hallar la verdad en las ciencias) y *La Dioptrique, Les Météores, and La Géométrie* (Dióptrica, La Geometría y Los Meteoros), entre otras.

[3]Matemático, lógico, filósofo y teólogo checo. En 1817 publica *Rein analytischer Beweis...* , el cual contiene un importante estudio sobre análisis real. En su filosofía, Bolzano criticó el idealismo de Georg Hegel (1770-1831) y Immanuel Kant (1724-1804).

[4]Matemático y astrónomo alemán. En *Der barycentrische Calcul* incluye muchos resultado de geometría proyectiva y geometría afín, en este trabajo también se introduce las *coordenadas homogéneas*, se trata lo que son las transformaciones geométricas y las transformaciones proyectivas. En 1831 publica *Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen* en donde introduce la función aritmética de Möbius. Es uno de los pioneros de la topología.

Calcul: ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie (Cálculo baricéntrico: una nueva utilidad para un tratamiento analítico de la Geometría) con transformaciones de rectas y cónicas, en donde aparecían vectores de una manera primigenia.

También es importante considerar los trabajos realizados por el matemático Giusto Bellavitis[5] (1803-1880) quien da la definición de *vector* como un segmento orientado, este estudio lo publicó Bellavitis en 1832, pero en este punto hay que destacar que su primera publicación la realiza en 1832, el cual se relacionó con su método, pero no presentó un desarrollo completo de su teoría, una segunda publicación apareció en 1833 y una tercera en 1835, en donde usa el término *equipollences* para expresar que son dos segmentos de líneas que son iguales y paralelas, y a continuación define las *sumas de segmentos de líneas equipolentes* y obtiene un *cálculo equipolente* y es aquí donde se da una exposición completa de su sistema, que básicamente es un espacio vectorial.



[5]Matemático italiano. Realizó importantes aportes a la geometría algebraica. Comienza en 1832 a desarrollar geométricamente el álgebra de los números complejos. Introduce un cálculo baricéntrico más general que el de Möbius. En álgebra, continua los trabajos de Paolo Ruffini (1765-1822) en la búsqueda de la solución numérica de las ecuaciones algebraicas y también realiza investigaciones en la teoría de números.

Bellavitis consideraba que el álgebra tiene que estar basada en la geometría, y he aquí donde reside su gran aporte al desarrollo de los espacios vectoriales.

1.2. Teoría de números

Aunque se presentan referencias a estudios con números complejos siglos antes de la era cristiana, los matemáticos griegos ya trabajaban con raíces cuadradas de números negativos. Los números complejos se hicieron más patentes a partir del siglo XVI, con los estudios realizados por los matemáticos Niccolò Fontana (llamado Tartaglia[6]) (1500-1557) y Girolamo Cardano[7] (1501-1576), cuando investigaban la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados dos y tres, aunque ellos sólo estaban interesados por la raíces reales de estos polinomios, en muchos casos se presentaban raíces con números negativos.

La existencia de números complejos fue aceptada a partir de las investigaciones realizadas por Caspar Wessel (1745-1818), en 1799 en donde realizó una interpretación geométrica de estos números. También Johann Carl Friedrich Gauss[8] (1777-1855) estudió este tema de manera independiente, y se debe a él la

[6]Matemático italiano apodado Tartaglia (el tartamudo). Creador de un método para resolver ecuaciones de tercer grado. Escribe en 1537, *Nova Scientia* (es una expresión en latín que significa nuevo saber) que resulta ser unos de los primeros estudios de aplicación de las matemáticas a la artillería. Además de sus trabajos matemáticos, Tartaglia publicó las primeras traducciones al italiano de las obras de Arquímedes y Euclides.

[7]Matemático, médico, astrólogo y filósofo italiano. En su libro *Ars magna* (en latín Gran Obra) publicado en 1545, da las soluciones a las ecuaciones de tercer y cuarto grado, pero en realidad el hallazgo de la solución de las ecuaciones cúbicas no se debe ni a Cardano ni a Tartaglia, sino a Scipione dal Ferro, quien la dio aproximadamente en 1515.

[8]Matemático, astrónomo y físico alemán. Su obra de mayor trascendencia es *Disquisitiones Arithmeticae*, publicada en 1801, aunque se dice que la término en 1798. Es imposible expresar en un pie de página todo el trabajo que realizó Gauss, pero si podemos decir que contribuyó significativamente en muchas áreas, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica, entre otras.

popularidad y gran relevancia que tomó, pues lo aplicó en algunos de sus resultados, podemos recordar que este en la disertación para su tesis doctoral demostró (ofrece una prueba rigurosa y completa del teorema, pues es de recordar que ya otros matemáticos habían trabajo sobre este tema) el teorema fundamental del álgebra, que dice que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja (realizada en 1799).

En 1837, William Rowan Hamilton[9] (1805-1865), publicó un ensayo titulado *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time* (Teoría de funciones conjugadas, o pares ordenados algebraicamente; con unos preliminares y ensayos elementales en álgebra como ciencia de los tiempos puros). Este documento se dividió en tres partes. La primera sección que consistió de una introducción general, la segunda sección, un ensayo sobre el álgebra como una ciencia pura, escrita en 1835 y la tercera sección que contenía su *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples* que escribió en su mayor parte en 1833. En la tercera sección, Hamilton desarrolló los números complejos en términos de pares ordenados de números reales casi de la misma manera como se hace en la matemática moderna (más o menos como Gauss, quién había considerado los complejos como puntos de un plano, desde 1831), como parte de este estudio de mayor generalización llego a los *cuaterniones*[10] y a una teoría de vectores. También es importante observa que existía desde hace unos años antes una representación geométrica de los números complejos como puntos en el plano dada por Jean-Robert Argand (1768-1822), quién en 1806 dio esta definición, creando así lo que se conoce como *plano de Argand*.

Hamilton paso los siguientes diez años de su vida tratando de definir una

[9]Matemático, físico, y astrónomo irlandés. En 1835 Hamilton publica *Algebra as the Science of Pure Time* (Algebra como la Ciencia de los Tiempos Puros), el cual está inspirado en los estudios que realizó de algunas obras de Immanuel Kant. Publica *Lectures on Quaternions* (Notas sobre cuaterniones) en 1853, donde expone su teoría de los cuaterniones.

[10]Primer álgebra no conmutativa estudiada.

multiplicación en el espacio tridimensional y con esta larga investigación realizada llegó a la estructura de los números llamados cuaterniones (para una definición consultar [20]) en donde estos números se expresan con cuatro componentes que no satisfacen la conmutatividad en la operación multiplicación. La teoría de lo cuaterniones publicada en 1843 es un importante ejemplo de un espacio vectorial de cuatro dimensiones.

Como producto de este tipo de generalizaciones se construye el concepto de *vector*, quién por primera vez utiliza este término es Hamilton, aunque la noción era conocida desde tiempos anteriores, por ejemplo, es justo destacar que hay elementos precursores de este concepto en los trabajos realizados por Simon Stevin[11] (1548-1620), Galileo Galilei[12] (1564-1642) e incluso, algunos afirman que hasta en la misma antigüedad se utilizaba. Este se trata de unos de los resultados más importante del álgebra en el siglo XIX.

Luego, Peter Tait[13] (1831-1901) lee *lectures of quaterniones* realizadas por Hamilton

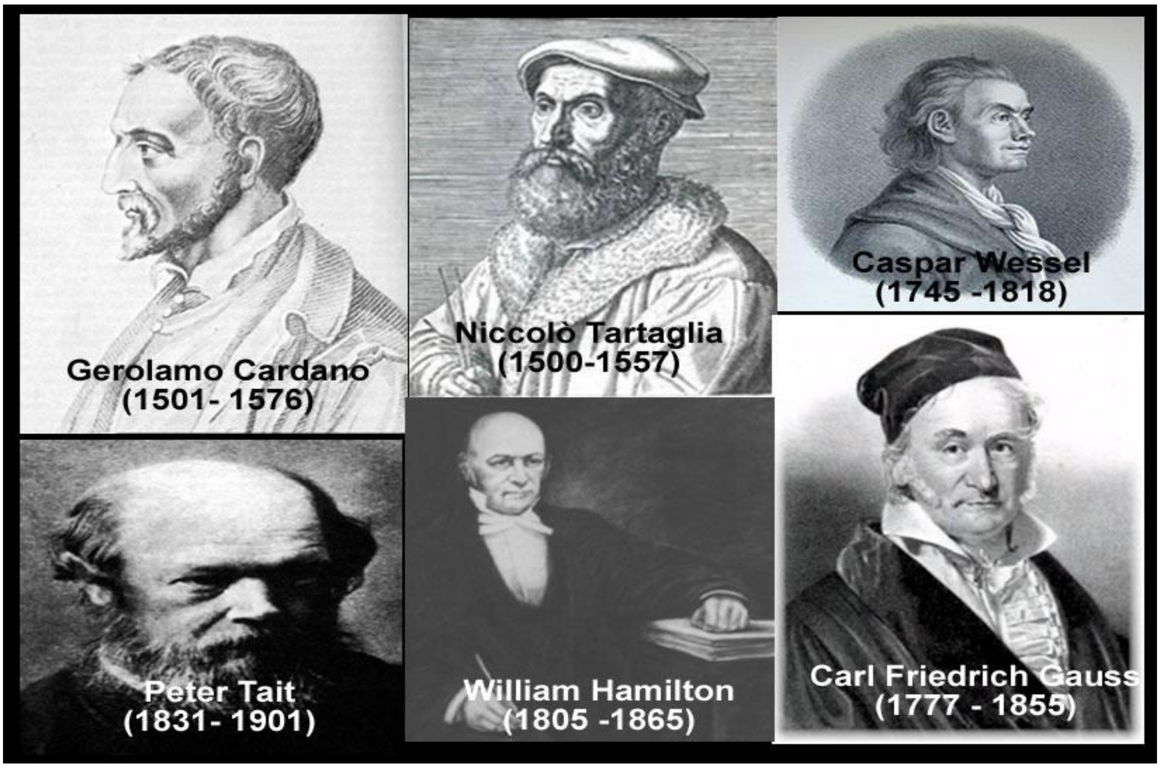
---

[11] Matemático, ingeniero militar e hidráulico, constructor de molinos y fortificaciones y semiólogo neerlandés. Mayormente conocido por ser quien desarrolló el algoritmo para la obtención del máximo común divisor de dos polinomios. Stevin, en su libro *Stelreghel* (Álgebra) usa la notación +, - y $\sqrt{\ }$. También realiza importantes contribuciones a la trigonometría, mecánica, arquitectura, teoría musical, geografía y navegación.

[12] Astrónomo, filósofo, matemático y físico italiano. El descubrimiento de cuatro satélites de Júpiter (se trata de los satélites de Júpiter llamados hoy satélites galileanos: *Calixto*, *Europa*, *Ganímedes* e *Io*) contradecía, por su parte, el principio de que la Tierra tuviera que ser el centro de todos los movimientos que se produjeran en el cielo. En cuanto al hecho de que Venus presentara fases semejantes a las lunares, que Galileo observó en 1610, le pareció que aportaba una confirmación empírica al sistema heliocéntrico de Copérnico, ya que éste, y no el de Ptolomeo, estaba en condiciones de proporcionar una explicación para el fenómeno, este resultado lo publico en *Sidereus Nuncius* (mensajero sideral o mensajero de los astros).

[13] Matemático y físico escocés. Interesado profundamente en las aplicaciones de la matemática a la física. Entre sus publicaciones podemos encontrar: *Elementary Treatise on Quaternions* (Tratado elemental sobre los cuaterniones, 1867), *Introduction to Quaternions* (Introducción a los cuaterniones, 1873). El trabajo donde publica la aplicación de los cuaterniones a la física es

en 1853, cuando aún estaba en Cambridge y aunque el tema era de su interés, lo postergó por unos tópicos de aplicaciones matemáticas a la física, pero años más tarde en 1858, Tait leyó un artículo escrito por Hermann von Helmholtz[14] (1821-1894) que publicó en *Crelle's Journal* que llevaba por título *über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen* (Sobre las integrales de las ecuaciones de la hidrodinámica, las cuales corresponden al movimiento de un remolino), trataba sobre el movimiento de fluidos y Tait observó que podía expresar la velocidad del fluido en función de vectores, es en parte así como se introduce la noción de vectores dada por Hamilton a la física.

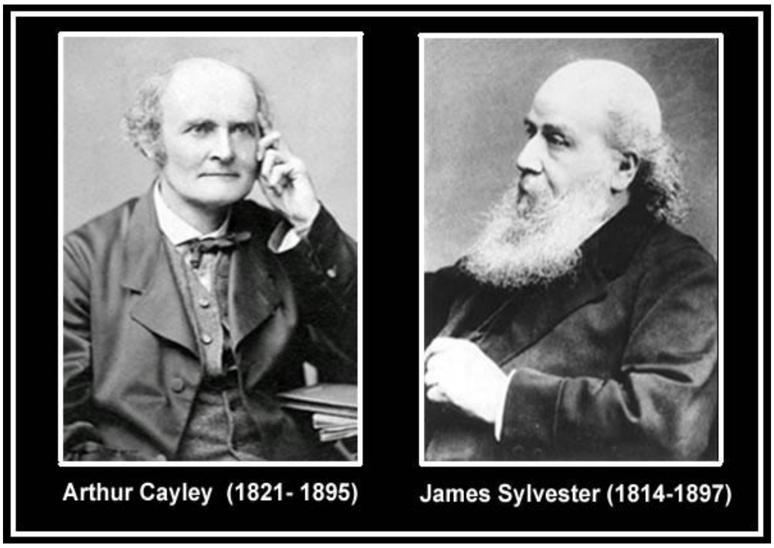


Quaternion investigations connected with electro-dynamics and magnetism (Investigaciones de la conexiones de los cuaterniones con la electrodinámicas y el magnetismo).

[14]Médico y físico alemán. Helmholtz escribió sobre muchos temas diferentes, entre ellos, temas tan divergente como la edad de la tierra, el origen del sistema planetario. En 1847 publica *Über die Erhaltung der Kraft* (Sobre la conservación de la energía), el cual es un estudio matemático correspondiente a la conservación de energía.

1.3. Matrices

En 1857, el matemático británico Arthur Cayley[15] (1821-1895) introduce el Álgebra de Matrices (aunque es importante acotar que el primero en usar el término *matrix* fue el matemático James Joseph Sylvester[16] (1814-1897) en 1850, quién definió la matriz como un arreglo de términos). Cayley es el primero que introduce la multiplicación de matrices. Con este estudio realiza un gran aporte al desarrollo de las estructuras algebraicas, pues él introduce las diferentes propiedades (leyes) que rigen a las matrices, con respecto a la suma y la multiplicación, y multiplicación por un escalar (que también definió él, así como también la inversa de una matriz).



[15]Matemático británico. Es el tercer matemático más prolífico de la historia (sobrepasado tan solo por Leonhard Euler (1707-1783) y Augustin Louis Cauchy (1789-1857)), publicó más de 900 documentos y notas referidas a casi todos los aspectos de la matemática moderna. El más importante de su trabajo es en el desarrollo del álgebra de matrices, el trabajo en la geometría no euclidiana y la geometría n-dimensional.

[16]Matemático británico. También realizó contribuciones a la teoría de las invariantes algebraicas (en colaboración con su colega A. Cayley), determinantes, teoría de números, particiones y combinatoria. En 1851 descubrió el discriminante de una ecuación cúbica. Fue el primero en utilizar el término de *discriminante* para las ecuaciones de ecuaciones de segundo grado y las de orden superior.

Cayley en 1858, prueba que los cuaterniones pueden ser representados por matrices, entonces aquí se realiza una fusión entre los cuaterniones y las matrices, abriendo así, paso más rápidamente a la noción de espacio vectorial, pues como expresamos anteriormente, ya las matrices poseen operaciones definidas sobre ellas y los cuaterniones tienen asociado cierta noción vectorial. También en 1858, Cayley publica su *Memoir on the theory of matrices* (Memoria sobre la teoría de matrices), la cual contiene su primera definición abstracta de matriz.

1.4. Sistemas de ecuaciones lineales

El problema de encontrarle solución a los sistemas de ecuaciones lineales se encuentra entre uno de los más antiguos en las matemáticas y tiene una infinidad de aplicaciones en distintas áreas de la matemática.

Podemos afirmar que el estudio moderno de los sistemas de ecuaciones lineales se originó con los trabajos de Gottfried Leibniz[17] (1646-1716) quien en 1693 ideó la noción de determinante con el fin de solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

Más tarde, Gabriel Cramer[18] (1704-1752) en su principal obra *Introduction à l'analyse de lignes courbes* (Introducción al análisis de las líneas curvas), publicada en 1750, en la que desarrolla la teoría de curvas algebraicas y está contenido en este la regla que lleva su nombre (la regla de Cramer) para la solución de un sistema lineal de $n \times n$ (n-ecuaciones, con n-incógnitas), pero él en este trabajo no aportó demostraciones para este hecho. También volvió a introducir la noción de determinante (que como acotamos anteriormente, este algoritmo lo había utilizado

[17]Filósofo, matemático, jurista y político alemán. Descubrió el cálculo infinitesimal, independientemente de Isaac Newton (1643-1727), y su notación es la que se emplea desde entonces. Leibniz fue el primero en utilizar el término *analysis situs* que luego se utilizaría en el siglo XIX para referirse a lo que se conoce como topología.

[18]Matemático suizo. Su obra fundamental fue la *Introduction à l'analyse de lignes courbes*, es donde se desarrolla la teoría de las curvas algebraicas según los principios newtonianos.

Leibniz a finales del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales).

Leonhard Euler[19] (1707-1783) fue quien observó que un sistema lineal con n-ecuaciones y n-incógnitas no necesariamente tiene solución única y luego Gauss en relación con su descubrimiento del *método de los mínimos cuadrados*, introducido en 1811, en donde estudia un proceso sistemático, que hoy en día se conoce como la *eliminación gaussiana*, para encontrar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales (aunque es de considerar que él no hizo uso de la notación matricial).

En 1867, Edmond Laguerre[20] (1834-1886) escribe una carta a Charles Hermite[21] (1822-1901) llamada *Sur le calcul des systèmes linèaires* (Sobre el cálculo de sistemas lineales), era una tabla de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales denotada con letras mayúsculas y Laguerre define la adición, resta y multiplicación de estos sistemas. También en este mismo año define las combinaciones lineales, pero restringidas a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

[19]Matemático y físico suizo. Introduce la mayor parte de la terminología moderna y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo el concepto de función matemática (en *Introductio in analysin infinitorum* (Introducción al Análisis del Infinito), publicada en 1748). Él también introduce la *función beta* y la *gamma*. En *Institutiones calculi integralis* (1768-1770) Euler hizo una investigación a fondo de las integrales que se puede expresar en términos de funciones elementales.

[20]Matemático francés. Sus obra más importante se encuentran en áreas de las matemáticas, tales como, el análisis y la geometría. Las obras completas de Laguerre se publicaron en dos volúmenes, volumen 1 en 1898 y el Volumen 2 en 1905. Charles Hermite, Henri Poincaré (1854-1912) y Eugène Rouché (1832-1910) editaron los dos volúmenes.

[21]Matemático francés. Realizó importantes contribuciones a la teoría de números, álgebra, polinomios ortogonales y funciones elípticas.

1.5. Espacios vectoriales

El primer estudio de lo que hoy se conoce como álgebra lineal se debe a los trabajos realizados por Hermann Grassmann[22] (1809-1877) y quién también es pionero en el desarrollo de las ideas relacionadas con los espacios vectoriales. En 1844, Grassmann publica su obra maestra *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (Teoría de las extensiones lineales, una nueva rama de la matemática), contiene en el las ideas básicas del Álgebra Lineal, incluyendo la noción de espacio vectorial n-dimensional, subespacios, conjunto generador, base, dimensión, transformaciones lineales, suma e intersección de subespacios.
Sin embargo, el trabajo de Grassmann no tuvo mucha influencia, debido a que su presentación fue un poco obscura, por ejemplo, el trabajo comienza con definiciones que pueden ser consideradas de naturaleza filosófica.
En 1862, Grassmann ofrece una nueva versión de su anterior obra (aparentemente por la sugerencia realizada por Alfred Clebsch[23] (1833-1872)) en donde expresaba sus ideas con mayor claridad. En esta versión desarrolla la teoría de la independencia lineal y elementos linealmente dependientes, también introdujo la definición de producto escalar.
Incluye además demostraciones relacionadas con la dimensión de los espacios vectoriales, entre las cuales se encuentra:

$$\mathbf{dim}U + \mathbf{dim}W = \mathbf{dim}(U + W) + \mathbf{dim}(U \cap W)$$

[22]Lingüista, matemático y físico alemán. Entre los muchos temas que abordó Grassmann está su ensayo sobre la teoría de las mareas. Grassmann escribió también sobre cristalografía, electromagnetismo, y mecánica.
[23]Físico y matemático alemán. Unos de sus trabajos de matemática aplicada a la física fue el publicado en 1862 con el titulo *Theorie der Elastizität fester Körper* (Teoría de la elasticidad de cuerpos sólidos). La matemática pura se convirtió en tema principal de su investigación, cuando comenzó a estudiar el cálculo de variaciones y ecuaciones diferenciales parciales. Fundador junto a Carl Gottfried Neumann de la revista matemática *Mathematische Annalen* en 1868.

para subespacios vectoriales U, W de un espacio vectorial.

Fue Hermann Hankel[24] (1839-1873) el matemático que valoró en justa medida el trabajo que había realizado Grassmann y en su obra *Theorie der Complexen Zahlensysteme* (Teoría de Sistemas de Números Complejos), publicada en 1867, ayudó a que se conocieran muchas de las ideas generadas por Grassmann.

Se tardó en adoptar los métodos matemáticos de Grassmann, pero influyeron directamente sobre Felix Klein[25] (1849-1925) y Élie Cartan[26] (1869-1951).

Otros matemáticos que trataron sobre estos temas fueron Augustin Louis Cauchy[27] (1789-1857) y Adhémar de Saint-Venant (1797-1886). En 1853, Cauchy publicó *Sur les defs algebriques* (Sobre las definiciones algebraicas), donde aparecen métodos y sistemas similares dados por Grassmann años anteriores. De hecho, la originalidad de estos trabajos han estado en discusión debido a que años antes Grassmann había enviado a Cauchy y Saint-Venant[28] un ejemplar de su trabajo.

[24] Matemático alemán. Sus trabajos versaron sobre geometría proyectiva y sobre la teoría de funciones de variable compleja. Estableció una representación de la función gamma por medio de una integral compleja y obtuvo soluciones a la ecuación diferencial de Bessel.

[25] Matemático alemán. Influenció considerablemente en la geometría no euclidiana, por sus trabajos realizados sobre las conexiones entre la geometría y la teoría de grupos, y con los resultados en la teoría de funciones.

[26] Matemático francés. Trabajó en diversas areas de las matemáticas, entre ellas se encuentran: *grupos continuos*, *álgebras de Lie*, ecuaciones diferenciales y la geometría. Sus investigaciones se centraron principalmente en los *grupos de Lie* y sus usos geométricos. También introdujo el concepto de *grupo algebraico*.

[27] Matemático francés. En *Leçons sur le Calcul Différentiel* (Lecciones sobre el Cálculo Diferencial) publicada en 1829, define por primera vez las funciones de variable compleja. Realizó importantes aportes a la geometría diferencial y las aplicaciones matemáticas a la física. Produjo 789 artículos matemáticos. Su colección de trabajos, fue publicada entre 1882 y 1970, con el titulo: *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* (Obras Completas de Augustin Cauchy), que abarcan 27 volúmenes en total.

[28] Saint-Venant entró en una disputa con Grassmann sobre la creación de algunas ideas referidas al cálculo vectorial. Grassmann había publicado sus resultados en 1844, pero Saint-Venant reclama que él había desarrollado primero estas ideas en 1832.

La definición axiomática moderna de espacios vectoriales sobre los números reales se la debemos a Giuseppe Peano[29] (1858-1932) quién utilizó el término *linear system*. Él postula la cerradura, asociatividad, distributividad y existencia del elemento neutro (elemento identidad).

Podemos afirmar que los espacios vectoriales empiezan a reconocerse abiertamente alrededor de 1920, y es con el trabajo realizado por Hermann Weyl[30] (1885-1955)

[29]Matemático y filósofo italiano. En 1888 Peano publica *Geometrical Calculus* (Cálculo Geométrico) el cual comienza con un capítulo dedicado a la lógica matemática. En 1889 Peano publicó sus famosos axiomas, llamados *axiomas de Peano*, que definen los números naturales en términos de conjuntos. Esto fue publicado en *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Principios Aritméticos, exposición de un nuevo método). Aunque Peano es un fundador de la lógica matemática, el filósofo y matemático alemán Gottlob Frege (1848-1925) es hoy considerado el padre de la lógica matemática.

[30]Matemático alemán. En 1913, Weyl publicó *Die Idee der Riemannschen Fläche* (La idea de una superficie de Riemann), que dio tratamiento unificado a las superficies de Riemann. De 1923 a 1938, Weyl desarrolló la teoría de grupos continuos en términos de representación matricial. Miembro del *Instituto de Estudios Avanzados de Princeton* en sus orígenes, contribuyendo para una visión internacional e integrada, es aquí donde publica los siguientes libros: *Elementary Theory of Invariants* (Teoría elemental de invariantes, 1935), T*he classical groups* (1939), *Algebraic Theory of Numbers* (Teoría algebraica de números, 1940), *Philosophy of Mathematics and Natural Science*

que lleva por nombre *Space, Time, Matter* (Espacio, tiempo y materia) publicado en 1918 y es aquí donde él da la noción de espacio vectorial de dimensión finita sobre los números reales, aparentemente sin darse cuenta que ya estaba definido por Peano treinta años antes (como se mencionó anteriormente).

1.6. Espacios vectoriales de dimensión infinita

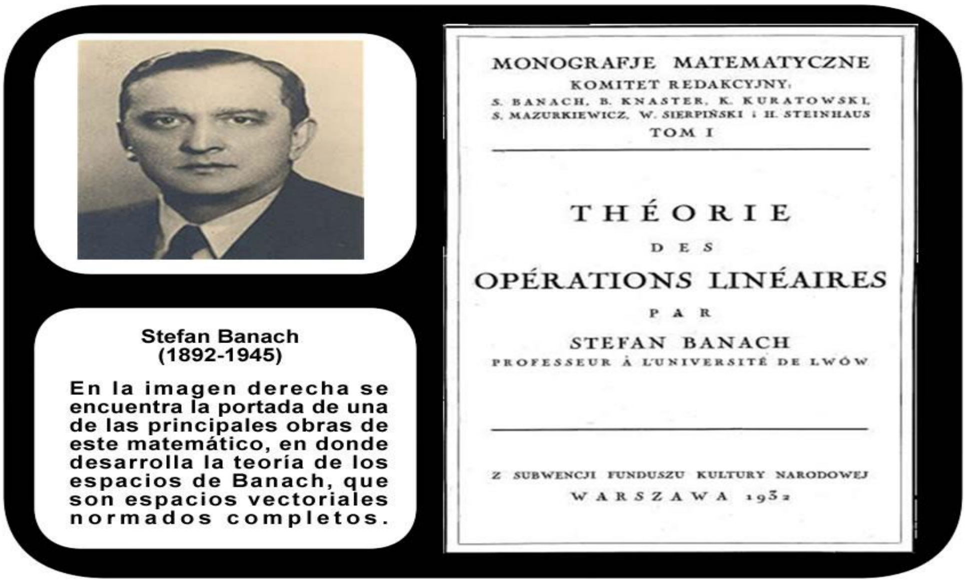
En el año de 1890, Salvatore Pincherle[31] (1853-1936) trabaja en una teoría formal de operadores lineales sobre los espacios vectoriales de dimensión infinita. Sin embargo, es importante acotar que Pincherle no se basa en la teoría dada por Peano, sino que utilizó los trabajos de Leibniz y Jean d′Alembert (1717-1783). Al igual que muchos de los trabajos realizados en esta área, tuvo poco impacto al momento de salir a la luz.

La axiomática de los espacios vectoriales de dimensión infinita fue estudiada por Stefan Banach[32] (1892-1945) en 1920, en su tesis doctoral *On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations* (Sobre operaciones con conjuntos abstractos y su Aplicación a las ecuaciones integrales) y los tópicos asociados a estos temas han sido investigados a partir de 1920.

(Filosofía de la matemática y ciencias naturales, 1949), *Symmetry* (Simetría, 1952), and *The Concept of a Riemannian Surface* (El concepto de una superficie de Riemann, 1955).

[31]Matemático italiano. Junto con Vito Volterra (1860-1940), puede ser considerado como fundador del análisis funcional.

[32]Matemático polaco. Además de ser uno de los creadores del análisis funcional, Banach también realizó contribuciones importantes a la teoría de la medida, Teoría de conjuntos, las series ortogonales y la teoría de espacios vectoriales topológicos. La *paradoja de Banach-Tarski* apareció en un artículo publicado por los dos matemáticos en 1926 en *Fundamenta Mathematicae*, que lleva por nombre *Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent* (Sobre la descomposición de conjuntos de puntos particionados respectivamente congruentes).



Uno de los desarrollos importantes de los espacios vectoriales de dimensión infinita se debe a la construcción de los espacios de funciones por Henri Lebesgue[33] (1875-1941). Banach en lo que se considera una de sus obras más importantes *Théorie des opérations linéaires* (Teoría de las operaciones lineales), publicada en 1932, formuló la definición de *espacios de Banach*, que son típicamente espacios de funciones de dimensión infinita (un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo).

Es prudente observar que David Hilbert[34] (1862-1943) y su estudiante Erhard

[33]Matemático francés. Definió la *integral de Lebesgue*, que generaliza la noción de la *integral de Riemann* extendiendo el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas. También aportó en areas de la matemática como la topología y el análisis de Fourier. Lebesgue formuló la teoría de la medida en 1901, en su famoso artículo *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (Sobre una generalización de la integral definida).

[34]Matemático alemán. En 1893 cuando aún estaba en Königsberg, Hilbert comenzó una obra *Zahlbericht* (Sobre teoría de números) sobre teoría de números algebraicos, la cual publica en 1897. Publicó *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la Geometría) en 1899 poniendo la geometría en un marco axiomático formal. Hilbert realizó contribuciones a muchas areas de las matemáticas, incluyendo la teoría de invariantes, cuerpos de los números algebraicos, análisis funcional, ecuaciones integrales, la física matemática, y el cálculo de variaciones.

Schmidt[35] (1876-1959) realizaron en 1905 investigaciones sobre espacios de funciones donde la dimensión es infinita.

Hilbert introdujo el concepto de un espacio euclídeo, que básicamente siempre es de dimensión infinita, llamados más tardes *espacios de Hilbert*. Este trabajo publicado en 1909, *Integral equations* (Ecuaciones integrales), establece las bases para los espacios vectoriales de dimensión infinita.

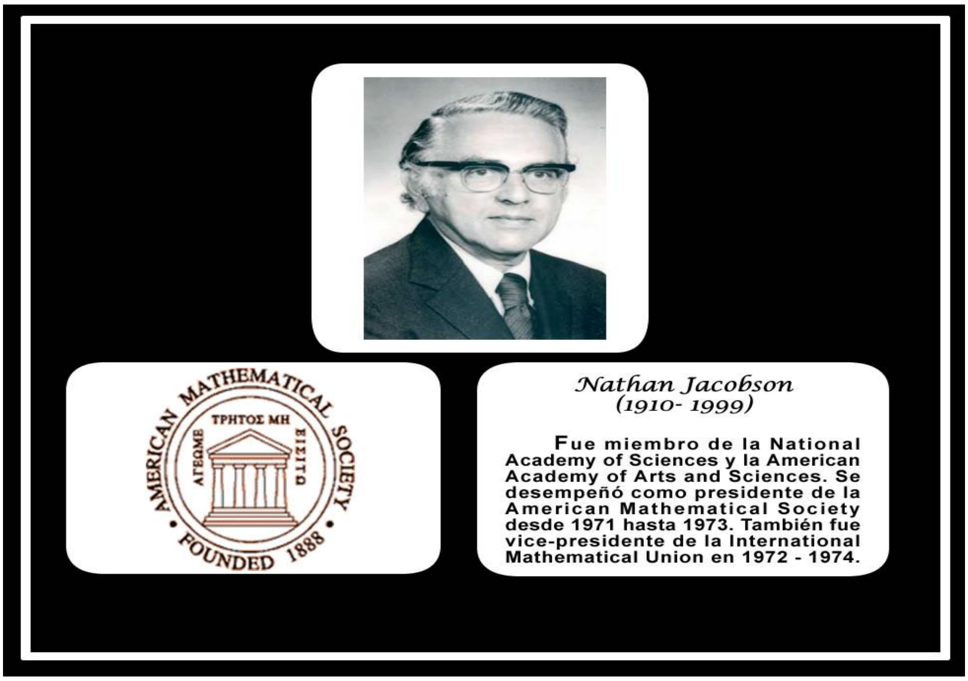
Los conceptos anteriormente mencionados pertenecen al área de la matemática denominada análisis funcional. Los siguientes avances de los espacios vectoriales provienen de esta rama, principalmente de los espacios de funciones.

Nathan Jacobson[36] (1910-1999) entre los años de (1951-1964) publica tres volúmenes titulados *lectures in abstract algebra*, donde se cubren los conceptos básicos de

[35]Matemático alemán. Publicó un artículo de dos partes sobre ecuaciones integrales en 1907, en el cual estudiaba los resultados de Hilbert de una manera más simple, y también con menos restricciones. En este trabajo se dio lo que ahora se llama el *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt* para la construcción de un conjunto ortonormal de funciones de un conjunto linealmente independiente.

[36]Su doctorado lo obtuvo en 1934 con una tesis que lleva por nombre *Non-commutative polynomials*

álgebra lineal, la teoría de cuerpos, y la teoría de Galois. En el segundo volumen, Jacobson le dedica un capítulo a los espacios vectoriales de dimensión infinita y utiliza herramientas de la teoría de conjuntos para demostrar algunos resultados relacionados con estos espacios. Este primero expresa las ideas fundamentales de espacios vectoriales que poseen dimensión finita y luego destaca algunas diferencias que se presentan entre los espacios vectoriales de dimensión finita con los que poseen dimensión infinita.



and cyclic algebras (Polinomios no conmutativos y álgebras cíclicas), los principales resultados se publicaron en la revista *Annals of Mathematics*. Entre sus obras de gran trascendencia podemos mencionar: *The theory of rings* (Teoría de anillos, 1943), Lectures in abstract algebra (Notas sobre álgebra abstracta, 1951-1964), que abarca conceptos básicos, álgebra lineal, la teoría de cuerpos y la teoría de Galois. *Structure of rings* (Estructura de anillos, 1956), *Lie algebras* (Álgebras de Lie, 1962), *Exceptional Lie algebras* (Excepcionales álgebras de Lie, 1971), *Structure and representations of Jordan algebras* (Estructura y representación de las álgebras de Jordan, 1968) y su obra de mayor importancia en el álgebra es *PI-algebras : an introduction* (Una introducción a las PI-Álgebras, 1975).

Capítulo 2

Estudio preliminar sobre Espacios Vectoriales

2.1. Introducción

Los espacios vectoriales son estructuras algebraicas que se estudian en la rama del Álgebra conocida como *Álgebra Lineal*. Históricamente las primeras ideas que abren paso a la definición moderna de espacio vectorial se remontan al siglo XVII, y aparecen en áreas de las matemáticas, tales como: geometría analítica, matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Los primeros estudios sobre estas estructuras se los debemos a: William Rowan Hamilton (1805-1865), Edmond Laguerre (1834-1886), Arthur Cayley (1821-1895), Hermann Grassmann (1809-1877), Giuseppe Peano (1858-1932) y Hermann Weyl (1885-1955).

Los espacios vectoriales hoy en día poseen una amplía aplicación en distintas áreas de las matemáticas: ecuaciones en derivadas parciales, geometría, topología y análisis funcional. Además, son de gran importancia en la física e ingeniería. Estas estructuras algebraicas pueden considerarse como una de las más estudiadas y utilizadas en diversos campos de las ciencias.

2.2. Espacios vectoriales

Definición 2.1 (Espacio vectorial) *Sea F un cuerpo. Un* `Espacio vectorial` *V sobre el cuerpo F es una cuaterna $(V, F, +, \cdot)$ tal que V es un conjunto no vacío, $+ : V \times V \longrightarrow V$ es una relación binaria en V y $\cdot$ es lo que se llama una operación externa en V, lo que significa simplemente que $\cdot : F \times V \longrightarrow V$. Además se han de cumplir las siguientes propiedades:*

(V1) $\forall v \in V\ \forall w \in V [v + w = w + v]$ *(conocida como* `conmutatividad`*).*

(V2) $\forall v \in V\ \forall w \in V\ \forall z \in V [(v + w) + z = v + (w + z)]$ *(conocida como* `asociatividad`*).*

(V3) $\exists 0_V \in V\ \forall v \in V [0_V + v = v]$ *(el elemento 0_V se denomina* `elemento neutro` *de V).*

(V4) $\exists w \in V\ \forall v \in V [v + w = 0_V]$ *(el elemento w se denomina* `opuesto` *de v).*

V1-V4, junto con $+$ que es una relación binaria en V, nos indica que $(V, +)$ es un grupo abeliano[1] *(o conmutativo).*

(V5) $\forall \alpha \in F\ \forall v \in V\ \forall w \in V [\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w]$.

(V6) $\forall \alpha \in F\ \forall \beta \in F\ \forall v \in V [(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v]$.

(V7) $\forall \alpha \in F\ \forall \beta \in F\ \forall v \in V [\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v]$.

(V8) $\forall v \in V [1_F \cdot v = v]$ *(donde 1_F es elemento identidad de F).*

La relación binaria $+$ es llamada `adición` y la operación $\cdot$ es llamada `multiplicación escalar`. Además a los elementos de un espacio vectorial V se les denomina con frecuencia `vectores` y a los elementos de F como `escalares`.

[1] Su nombre se debe al matemático Niels Henrik Abel (1802-1829).

Por razones de simplificación de notación, si $\alpha \in F$ y $v \in V$, escribiremos αv, en lugar de $\alpha \cdot v$, en todo el desarrollo posterior de este trabajo.
Estudiemos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

Ejemplo 2.1.1 (Espacios de las n-tuplas) *Sea F un cuerpo y $n \in \mathbb{N}^+$. Consideremos:*

$$F^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ (a_i \in F \ \wedge \ 1 \leq i \leq n)\}$$

entonces los elementos $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in F^n$ son iguales sí y sólo sí $a_i = b_i$, para cualquier $1 \leq i \leq n$. Se definen la operación de adición y multiplicación escalar como:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \qquad (2.1)$$

$$\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n) \qquad (2.2)$$

Así $(F^n, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

El elemento neutro de F^n es:

$$\overbrace{(0_F, 0_F, \ldots, 0_F)}^{n-veces}$$

Si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n$, el elemento opuesto de a es:

$$(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) = -a.$$

Las definiciones correspondientes al siguiente ejemplo la podemos encontrar en el apéndice del documento en la sección B.2.

Ejemplo 2.1.2 (Espacios de las sucesiones infinitas) *Sea F un cuerpo y V el conjunto de todas las sucesiones infinitas. Se dice que dos sucesiones infinitas $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son iguales sí y sólo sí cada una de sus componentes son iguales, es decir:*

$$\{a_n\} = \{b_n\} \iff a_i = b_i \quad (\forall i \in \mathbb{N}^+) \qquad (2.3)$$

y las operaciones de adición y multiplicación escalar se definen del siguiente modo:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \tag{2.4}$$

$$\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\} \tag{2.5}$$

en donde $\{a_n\} \in V$ *y* $\{b_n\} \in V$, $\alpha \in F$. *Entonces* $(V, F, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial.*

Ejemplo 2.1.3 (Espacios de funciones) *Sea F un cuerpo. El conjunto F^F (ver apéndice, sección B.1), con las operaciones de adición y multiplicación escalar definidas de la forma siguiente:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{2.6}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \tag{2.7}$$

en donde $x \in F$, $f \in F^F$ *y* $g \in F^F$. *Entonces* $(F^F, F, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial.*

Se observa que $+$ es una relación binaria en F^F. Probaremos la asociatividad de $+$ (V1) como a manera de ilustración. Si $f \in F^F$, $g \in F^F$ y $h \in F^F$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} [(f+g)(x)] + h(x) &= [f(x) + g(x)] + h(x) && \star \text{ Por 2.6.} \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] && \star \text{ Por asociatividad en } F. \\ &= f(x) + [(g+h)(x)] && \star \text{ Por 2.6.} \end{aligned}$$

El elemento neutro de F^F es la función 0_{F^F}, definida como:

$$\begin{aligned} 0_{F^F} \; : \; F &\longrightarrow F \\ : \; x &\longmapsto 0_F = 0_{F^F}(x) \end{aligned}$$

y si $f \in F^F$, su elemento opuesto es $-f \in F^F$. Las propiedades que faltan por probar (V4-V8) son obvias y por esta razón se omiten.

Ejemplo 2.1.4 (Espacios de las funciones continuas) *Sean* $F = \mathbb{R}$ *y* $\mathcal{C}[a, b]$ *con la operaciones de adición y multiplicación escalar definidas de igual forma que en 2.6 y 2.7. Entonces* $(\mathcal{C}[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial.*

Se puede cambiar el cuerpo $F = \mathbb{C}$ y de igual forma $(\mathcal{C}[a,b], \mathbb{C}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 2.1.5 (Espacios de las funciones polinomios) *Sea F un cuerpo, $F[x]$ el conjunto de todos los polinomios y $m \in \mathbb{N}$. Se tiene que:*

$$\begin{aligned} F[x] &= \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots : (a_i \in F, \ \ 0 \leq i < \infty), \cdots \\ \cdots & \qquad\qquad tal \ \ que \ \ \exists m \in \mathbb{N}, k > m \quad \Longrightarrow \quad a_k = 0\} \end{aligned}$$

Consideremos $p(x) \in F[x]$ $(p(x) \neq 0)$, por definición $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $k > m$, entonces $a_k = 0$. Sea n el menor entero con esa característica (que existe por el Principio del entero mínimo, ver [20]); entonces podemos escribir $p(x)$ como:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

tal n se denomina `grado` *de $p(x)$ y se denota por $grad(p(x))$. Por tanto si*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad y \quad q(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j \quad y \quad \alpha \in F$$

se definen la operación de adición y multiplicación escalar así:

$$p(x) + q(x) = \sum_{j=0}^{r} (a_j + b_j) x^j \tag{2.8}$$

$$\alpha p(x) = \sum_{j=0}^{r} (\alpha a_j) x^j \tag{2.9}$$

En donde $r = \boldsymbol{max}\{n, s\}$. Entonces $(F[x], F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 2.1.6 (Espacios de funciones medibles) *Sea $F = \mathbb{R}$ un cuerpo (también se puede tomar $F = \mathbb{C}$). Sea $\mathcal{L}_0(\mu)$ el conjunto de todas las funciones medibles (ver apéndice B.3) y lo escribimos como sigue:*

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathrm{X}} : f \ \ es \ \ medible\}$$

para indicar el cuerpo sobre el cual se esta trabajando muchas veces se escribe $\mathcal{L}_0(\mu,\mathbb{R})$ *(y* $\mathcal{L}_0(\mu,\mathbb{C})$*, si se está trabajando con el cuerpo de los números complejos). Si definimos la adición y multiplicación escalar tal como se realizó en 2.6 y 2.7, entonces* $(\mathcal{L}_0(\mu),\mathbb{R},+,\cdot)$ *es un espacio vectorial (igualmente, también se puede asegurar que* $(\mathcal{L}_0(\mu),\mathbb{C},+,\cdot)$ *es un espacio vectorial).*

Ejemplo 2.1.7 (Espacios de matrices) *Sea* F *un cuerpo y sean* $m \in \mathbb{N}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$. *El conjunto* $\mathcal{M}^{m\times n}(F)$ *de todas las matrices* $m \times n$ *con entradas en el cuerpo* F *es un espacio vectorial, con las operaciones de adición y multiplicación por escalares definidas del siguiente modo:*

$$[A]_{ij} + [B]_{ij} = [A+B]_{ij} \tag{2.10}$$

$$\alpha[A]_{ij} = [\alpha A]_{ij} \tag{2.11}$$

en donde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $[A]_{ij} \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$ *y* $[B]_{ij} \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$.

El elemento neutro de $\mathcal{M}^{m\times n}(F)$ es $0_{\mathcal{M}^{m\times n}(F)} = [0_F]_{ij}$. El elemento opuesto de $[A]_{ij} \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$ es $-[A]_{ij} \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$.

Veamos que se cumple (V5) y las otras propiedades de espacios vectoriales se prueban de manera similar. Si $\alpha \in F$, $[A]_{ij} \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$ y $[B]_{ij} \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha([A]_{ij} + [B]_{ij}) &= \alpha([A+B]_{ij}) && \star \text{ Por ecuación 2.10.}\\
&= ([\alpha(A+B)]_{ij}) && \star \text{ Por ecuación 2.11.}\\
&= [\alpha A + \alpha B]_{ij} && \star \text{ Por distributividad en } F.\\
&= [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} && \star \text{ Por ecuación 2.10.}\\
&= \alpha[A]_{ij} + \alpha[B]_{ij} && \star \text{ Por ecuación 2.11.}
\end{aligned}$$

Proposición 2.2 *Sea* $(V,F,+,\cdot)$ *un espacio vectorial. Entonces:*

1. *El elemento neutro de* V*, es decir* O_V*, es único.*

2. *El elemento opuesto de v es único y se denota por* $-v$.

3. *Para todo $v \in V$, se tiene que:*

$$v + v = v \qquad \Longleftrightarrow \qquad v = 0_V. \tag{2.12}$$

4. $\forall \alpha \in F[\alpha 0_V = 0_V]$.

5. $\forall v \in V[0_F v = 0_V]$. *(donde 0_F es el elemento neutro de F).*

6. *Sean $\alpha \in F$ y $v \in V$, entonces:*

$$[(\alpha v = 0_V) \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha = 0_F \ \vee \ v = 0_V)]. \tag{2.13}$$

7. $\forall \alpha \in F \forall v \in V[(-\alpha)v = -(\alpha v)]$.

8. *Dado $u, v \in V$, existe un único $w \in V$, tal que* $w + u = v$.

La demostración de esta proposición es rutinaria y se puede encontrar en [7] o [19].

2.3. Subespacios vectoriales

Definición 2.3 (Subespacio vectorial) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Un subconjunto W no vacío de V es un* `subespacio vectorial` *de V, si W es un espacio vectorial sobre el cuerpo F, con las mismas operaciones de adición y multiplicación escalar definidas en V. Lo denotamos como $W \leq V$.*

Se escribirá W es un subespacio vectorial de V, en lugar de $(W, F, +, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(V, F, +, \cdot)$, para simplificar la notación.
La siguiente proposición proporciona una manera más sencilla de determinar si un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio vectorial.

Proposición 2.4 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Un subconjunto* $W \neq \emptyset$ *de* V *es un subespacio vectorial de* V *si para todo* $v, w \in W$ *y* $\alpha, \beta \in F$*, se tiene que* $\alpha v + \beta w \in W$.

La demostración de este resultado se encuentra en [8].

Considérese algunos ejemplos de subespacios vectoriales para facilitar la comprensión de este concepto:

Ejemplos 2.4.1 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Se tiene que* V *es un subespacio de si mismo, es decir,* $V \leq V$*. Además, el conjunto formado únicamente por el elemento neutro de* V *constituye un subespacio de* V*, es decir,* $\{0_V\} \leq V$*, a este subespacio se le conoce como* `subespacio nulo`*. Los dos subespacios anteriores son conocidos como* `subespacios triviales o impropios`*. Así que cualquier subespacio vectorial distinto a los anteriores se les denomina* `subespacios propios`*.*

Ejemplo 2.4.2 *Sea* $[A]_{ij} \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$*, con* $m, n \in \mathbb{N}^+$ *y* $1 \leq i \leq m$*,* $1 \leq j \leq n$*. Entonces:*

$$K(A) = \{x \in F^{n\times 1} : \ \ Ax = 0_{F^m}\}$$

es un subespacio vectorial de F^n*.*

Ejemplo 2.4.3 (Subespacios de las sucesiones convergentes) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *el espacio vectorial de las sucesiones infinitas de números reales (ver ejemplo 2.1.2) y sea* W *el conjunto de todas las sucesiones infinitas de números reales que convergen a* 0*, es decir:*

$$W = \left\{\{a_n\} \in V : \ \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$$

Entonces $W \leq V$*.*

Ejemplo 2.4.4 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *el espacio vectorial de las sucesiones infinitas, podemos considerar que* $F = \mathbb{C}$ *y* $\{a_n\}$ *una sucesión infinita de números* *complejos. Sea $p \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto W de la siguiente manera:*

$$W = \left\{ \{a_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

Entonces W es un subespacio vectorial de V.

Notemos que $+$ es una relación binaria en V, ya que si $\{a_n\}, \{b_n\}$ son elementos de V, se verifica que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{1/p} \tag{2.14}$$

tal desigualdad es conocida con el nombre de `desigualdad de Minkowski`'s y la demostración de este resultado puede encontrarse en [15].

Ejemplo 2.4.5 (Subespacios de funciones)

1. $\mathcal{C}[a,b] \leq F^F$.

2. $F[x] \leq \mathcal{C}[a,b]$.

3. $\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \leq F^F$.

Ejemplo 2.4.6 (Subespacios de funciones diferenciables) *Sea $\mathcal{D}[a,b]$ el conjunto de todas las funciones diferenciables en el intervalo $[a,b]$, entonces:*

$$\mathcal{D}[a,b] \leq \mathcal{C}[a,b].$$

Proposición 2.5 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de V. Entonces:*

$$\bigcap_{i \in I} U_i \leq V \tag{2.15}$$

Es decir, la intersección arbitraria de una familia de subespacios vectoriales es también un subespacio de V.

Además podemos afirmar que si $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V, entonces:

$$\bigcup_{i\in I} U_i$$

no es, en general, un subespacio vectorial de V.
Obsérvese que si $U \leq V$ y $W \leq V$, entonces $U \cup W$ es un subespacio de V si y sólo si uno de ellos esta contenido en el otro, es decir:

$$U \cup W \leq V \iff (U \subseteq W \ \vee \ W \subseteq U) \tag{2.16}$$

Un ejemplo es bueno para sustentar la observación realizada anteriormente. Supongamos que $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y que $V = \mathbb{R}^2$, además se define de la siguiente manera los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 0\} \\ W &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y = 0\} \end{aligned}$$

y es fácil ver que tanto U como W son subespacios de V. Por consiguiente:

$$U \cup W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + y = 0 \ \vee \ x - y = 0)\}$$

Ahora, se puede notar que $U \cup W$ no es un subespacio de V, puesto que no se cumple la proposición 2.4, porque si tenemos por ejemplo que $u = (2, -2) \in U$ y $w = (2, 2) \in W$, entonces $u + w = (2, -2) + (2, 2) = (4, 0) \notin U \cup W$. Por lo tanto $U \cup W$ no es un subespacio de V.
En la mayoría de los casos no se cumple que $+$ es una relación binaria en $U \cup W$ y el ejemplo anterior es una muestra de este hecho.

Definición 2.6 (Suma) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y U, W ambos subespacios vectoriales de V. La* `suma` *$U + W$ se define como:*

$$U + W = \{u + w : (u \in U \ \wedge \ w \in W)\} \tag{2.17}$$

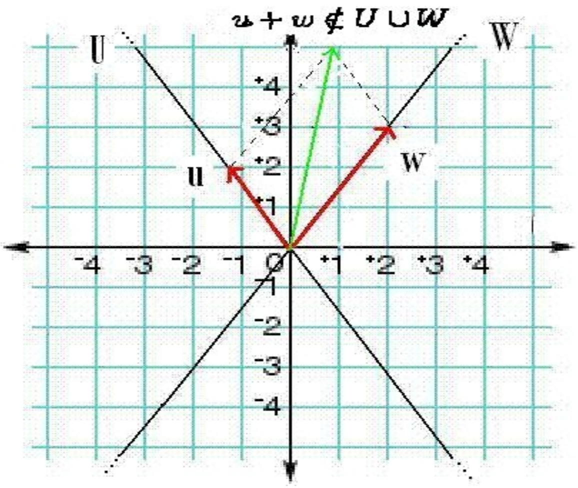


Figura 2.1: Unión de subespacios

Podemos extender esta definición a sumas finitas de subespacios vectoriales como: si I es un conjunto de índices finito (es decir, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}^+$) entonces la suma de una familia de subespacios $\{U_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de todas las sumas finitas de vectores de la unión de los $\{U_i\}_{i\in I}$:

$$\sum_{i\in I} U_i = \left\{u_1 + u_2 + \cdots + u_n : (u_i \in U_i \quad \wedge \quad 1 \leq i \leq n \quad \wedge \quad n \in \mathbb{N}^+)\right\}$$

2.4. Combinaciones lineales

Definición 2.7 (Combinación lineal) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Si $W \subseteq V$ y $H \subseteq F$, entonces cualquier elemento de V escrito de la forma siguiente:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n \tag{2.18}$$

con $\alpha_i \in H$ y $w_i \in W$ es una `combinación lineal` *de W con* `coeficientes escalares` *en H.*

Si se tiene que $v \in V$ y

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

entonces se dice que v es combinación lineal de los elementos $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de W, lo denotaremos como $L(W)$. Es decir:

$$L(W) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i : \ (\alpha_i \in F \ \wedge \ w_i \in W \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+) \right\} \tag{2.19}$$

Para cada $v \in V$, el conjunto de todas la combinaciones lineales de $\{v\} \subseteq V$ se escribe como $L(\{v\})$, pero se usará $L(v)$ en lugar de $L(\{v\})$ para simplificar la notación.

Proposición 2.8 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $W \subseteq V$ (con $W \neq \emptyset$). Se tiene que:*

1. *$L(W) \leq V$.*
2. *Si $U \subseteq W$, entonces $L(U) \subseteq L(W)$.*
3. *Si además $W \leq V$, entonces $L(W) = W$. Así que:*

   $$L^2(W) = L(L(W)) = W$$

   y en general

   $$L^k(W) = L(W) = W, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

4. *$L(W)$ es el menor (en cuanto a la contención) subespacio que contiene a W.*
5. *Si I es un conjunto de índices finito (es decir, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, con $n \in \mathbb{N}^+$) y $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de V. Entonces:*

   $$L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) = \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

   y además

   $$L\left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

   de hecho, en este caso se puede considerar un conjunto de índices cualesquiera y se sigue cumpliendo la aseveración realizada.

<u>Demostración:</u>

(1) i) $L(W) \neq \emptyset$. Por hipótesis se tiene que $W \neq \emptyset$, por lo tanto existe $w \in W$ y por la definición 2.1-V8 $w = 1_F w$, así que $w \in L(W) \neq \emptyset$.

ii) $L(W) \subseteq V$. Es inmediata por definición de $L(W)$.

iii) Si $\alpha, \beta \in F$ y $u, w \in L(W)$, entonces podemos escribir a

$$\left(u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \quad \wedge \quad w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j \right)$$

por definición de $L(W)$. Así que:

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta w &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \beta \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha(\alpha_i w_i) + \sum_{j=1}^{n} \beta(\beta_j w_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i) w_i + \sum_{j=1}^{n} (\beta\beta_j) w_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j
\end{aligned}$$

y entonces , $\alpha u + \beta w \in L(W)$. Por consiguiente, por la proposición 2.4

$$L(W) \leq V.$$

$\diamond$

(2) Debemos demostrar que si $U \subseteq W$, entonces $L(U) \subseteq L(W)$. Si $u \in L(U)$, entonces existen $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ (con $n \in \mathbb{N}^+$), tal que podemos escribir a u de la siguiente manera:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

Ahora, como $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq U$, entonces por hipótesis se tiene que $U \subseteq W$, así que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq W$. Por lo tanto:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in L(W)$$

$\diamond$

(3) Si $W \leq V$, entonces $L(W) = W$.

Tenemos que probar que $W \subseteq L(W)$ y además $L(W) \subseteq W$.

($\subseteq$) $W \subseteq L(W)$ es inmediata.

($\supseteq$) $L(W) \subseteq W$.

Si tenemos que $w \in L(W)$, entonces por definición de $L(W)$ existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ (con $n \in \mathbb{N}^+$) tal que w se escribe como:

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \in L(W)$$

y por la proposición 2.4, se tiene que $w \in W$. Luego $L(W) \subseteq W$. Por lo tanto, de ($\subseteq$) y ($\supseteq$) se obtiene que:

$$L(W) = W$$

Ahora, debemos probar que:

$$L^2(W) = L(L(W)) = L(W) = W$$

y como sabemos por 1) que $L(W) \leq V$, entonces por lo anteriormente demostrado, tenemos que:

$$L^2(W) = L(L(W) = L(W)$$

y como por hipótesis $W \leq V$, se tiene también por lo que previamente se probó que

$$L^2(W) = W$$

Utilizando un razonamiento similar, se obtiene que:

$$L^k(W) = W \qquad (con \;\; k \in \mathbb{N}^+)$$

$\diamond$

(4) Ahora probemos que $L(W)$ es el menor (en cuanto a la contención) subespacio que contiene a W. Es decir, demostremos que:

$$L(W) = \bigcap\{U \subseteq V : \;\; (W \subseteq U \;\; \wedge \;\; U \leq V)\}$$

$(\subseteq)$ $L(W) \subseteq \bigcap\{U \subseteq V : \;\; (W \subseteq U \;\; \wedge \;\; U \leq V)\}$.

Supongamos que $U \leq V$, tal que $W \subseteq U$, así que por 3), $L(U) = U$ y como $W \subseteq U$, entonces por 2)

$$L(W) \subseteq L(U) = U$$

por lo tanto:

$$L(W) \subseteq U.$$

así que por definición de intersección

$$L(W) \subseteq \bigcap\{U \subseteq V : \;\; (W \subseteq U \;\; \wedge \;\; U \leq V)\}$$

$(\supseteq)$ $\bigcap\{U \subseteq V : \;\; (W \subseteq U \;\; \wedge \;\; U \leq V)\} \subseteq L(W)$

Sabemos por 1) que $L(W) \leq V$ y que además $W \subseteq L(W)$ (por definición de $L(W)$). Por lo tanto

$$L(W) \in \bigcap\{U \subseteq V : \;\; (W \subseteq U \;\; \wedge \;\; U \leq V)\}$$

y por definición de intersección

$$\bigcap\{U \subseteq V : \;\; (W \subseteq U \;\; \wedge \;\; U \leq V)\} \subseteq L(W)$$

y por $(\subseteq)$ y $(\supseteq)$ se obtiene que:

$$L(W) = \bigcap\{U \subseteq V : \;\; (W \subseteq U \;\; \wedge \;\; U \leq V)\}$$

$\diamond$

(5) Debemos demostrar que:

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) = \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

($\subseteq$) Veamos que:

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

Supongamos que $\{W_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de subespacios de V. Entonces por 1) se tiene que $\{L(W_i)\}_{i=1}^{n}$ es una familia de subespacios de V, y por definición 2.6 (definición de suma) es fácil observar que:

$$\sum_{i=1}^{n} L(W_i) \leq V$$

Veamos que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} W_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

Supongamos que:

$$w \in \bigcup_{i=1}^{n} W_i$$

entonces por definición de unión existe un $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $w \in W_j$; y por definición de $L(W_j)$, se tiene que $w \in W_j \subseteq L(W_j)$ y por definición 2.6:

$$L(W_j) \subseteq \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

por lo tanto

$$w \in \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

así que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} W_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

y por 2) tenemos que:

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) \subseteq L\left(\sum_{i=1}^{n} L(W_i)\right)$$

y como:

$$\sum_{i=1}^{n} L(W_i) \leq V$$

por 3) se obtiene que:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} L(W_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

por consiguiente:

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

($\supseteq$) Ahora nos falta por ver que:

$$\sum_{i=1}^{n} L(W_i) \subseteq L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

si tenemos un $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (con $n \in \mathbb{N}^+$), en donde j es un número fijo, entonces por definición de unión se tiene que:

$$W_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_i \quad \textit{entonces por } 2) \quad L(W_j) \subseteq L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

A continuación demostraremos la contención:

$$\sum_{i=1}^{n} L(W_i) \subseteq L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

Supongamos que:

$$w \in \sum_{i=1}^{n} L(W_i)$$

entonces w se puede escribir como:

$$w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

en donde $w_i \in L(W_i)$ (con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^+$), pero como:

$$L(W_j) \subseteq L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (j fijo), tenemos que:

$$w_j \in L(W_j) \subseteq L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

por consiguiente:

$$w_j \in L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

y como tenemos que:

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) \leq V$$

se tiene por la proposición 2.4 que:

$$w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \in L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

así que:

$$\sum_{i=1}^{n} L(W_i) \subseteq L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

y por $(\subseteq)$ y $(\supseteq)$ se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} L(W_i) = L\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$$

De 5), nos falta por probar que:

$$L\left(\bigcap_{i\in I} W_i\right) = \bigcap_{i\in I} W_i$$

Sabemos que $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios de V y por la proposición 2.5 se tiene que:

$$\bigcap_{i\in I} W_i \leq V$$

y por 3), obtenemos que:

$$L\left(\bigcap_{i\in I} W_i\right) = \bigcap_{i\in I} W_i$$

$\square$

2.5. Sistemas de generadores

Definición 2.9 (Subespacio vectorial generado por W) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Si $W \subseteq V$, llamaremos* `subespacio vectorial generado` *por W a la intersección de todos los subespacios de V que contienen a W. Lo denotaremos como $\langle W \rangle$. Es decir:*

$$\langle W \rangle = \bigcap \{U \subseteq V : (W \subseteq U \quad \wedge \quad U \leq V)\}$$

Notar que $\langle W \rangle$ es un subespacio (por proposición 2.5) y además siempre existe pues $V \leq V$ (por ejemplo 2.4.1) y $W \subseteq V$.
Además por convención se tiene que $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$.

Proposición 2.10 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Si $W \neq \emptyset$ y $W \subseteq V$; entonces:*

$$\langle W \rangle = \left\{ v \in V : \exists n \in \mathbb{N}^+, \ \exists \alpha_i \in F, \ \exists w_i \in W, \ 1 \leq i \leq n, \ \textit{tal que } v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \right\}$$

Lo que se expreso en esta proposición es que:

$$L(W) = \langle W \rangle$$

y la demostración de este resultado se realiza de manera similar que para el caso de la teoría de grupos, anillos y módulos, para esto consultar [20]. En la mayor parte del trabajo utilizaremos la notación de $L(W)$, en lugar de $\langle W \rangle$.

Definición 2.11 (Sistema generador de V) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y W un subconjunto de V. Si $L(W) = V$, se dice que W es un* `sistema generador` *de V.*

Ejemplo 2.11.1 (Sistema generador del espacio de las n-tuplas) *Tenemos por ejemplo 2.1.1 que $(F^n, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y si $1 \leq i \leq n$, con*

$n \in \mathbb{N}^+$. Se define a $e_i \in F^n$ como:

$$e_i = \underbrace{(0_F, 0_F, \ldots, 0_F, \overbrace{1_F}^{posicion\ \ i}, 0_F, \ldots, 0_F)}_{n-tuplas}$$

por ejemplo:

$$e_3 = (0_F, 0_F, \overbrace{1_F}^{posicion\ \ 3}, \ldots, 0_F)$$

y definimos el conjunto W como sigue:

$$W = \{e_i : \ (1 \le i \le n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+)\}$$

entonces W es un sistema generador de F^n. En efecto, si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in F^n$, se tiene que:

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

Ejemplo 2.11.2 (Sistema generador del espacio de los polinomios) *Sabemos que $(F[x], F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial (por ejemplo 2.1.5). Entonces si definimos W de la siguiente forma:*

$$W = \{x^i : \ (0 \le i < \infty \ \wedge \ i \in \mathbb{N})\} \tag{2.20}$$

Asumiendo que $x^0 = 1_F$, tenemos que W es un sistema generador de V. Es decir:

$$L(W) = F[x]$$

Ejemplo 2.11.3 (Sistema generador del espacio de matrices) *Consideremos el espacio vectorial $(\mathcal{M}^{m\times n}(F), F, +, \cdot)$ (por ejemplo 2.1.7) y si $m, n \in \mathbb{N}^+$, con $1 \le i \le m$, $1 \le p \le m$, $1 \le j \le n$ y $1 \le q \le n$. Se define:*

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mq} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde las entradas de las matrices vienen dadas por la siguiente expresión:

$$a_{pq} = \begin{cases} 1_F & si\ (p = i \ \wedge \ q = j); \\ 0_F & si\ (p \neq i \ \wedge \ q \neq j). \end{cases}$$

Por consiguiente, definimos el conjunto W como sigue:

$$W = \{E_{ij} : \ (1 \leq i \leq m \ \wedge \ 1 \leq j \leq n)\} \tag{2.21}$$

por lo tanto, los elementos de $\mathcal{M}^{m\times n}(F)$ pueden escribirse como combinación lineal de W, es decir, $L(W) = \mathcal{M}^{m\times n}(F)$.

Proposición 2.12 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Si $U \subseteq V$ es un sistema generador de V y $W \subseteq V$, tal que $U \subseteq L(W)$. Entonces $L(W) = V$, es decir, W es un sistema generador de V.*

Demostración:
Sabemos por hipótesis que $L(U) = V$ y que además $U \subseteq L(W)$, entonces por la proposición 2.8-2:

$$L(U) \subseteq L(L(W))$$

y como $L(W)$ es un subespacio de V y por la proposición 2.8-3 se obtiene:

$$V = L(U) \subseteq L(L(W)) = L(W)$$

así que $V \subseteq L(W)$ y es evidente que $L(W) \subseteq V$. Por lo tanto:

$$V = L(W).$$

□

Definición 2.13 (Finitamente generado) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $W \subseteq V$. Si W es un sistema generador de V y W es finito, se dice que V es* `finitamente generado` *por W.*

Definición 2.14 (Infinitamente generado) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Diremos que V es* `infinitamente generado` *por W, si W es infinito y $V = L(W)$.*

Ejemplo 2.14.1 *Si tenemos a W definido como en el ejemplo 2.11.1, es decir:*

$$W = \{e_i : \ (1 \leq i \leq n \ \ \wedge \ \ n \in \mathbb{N}^+)\}$$

entonces F^n es finitamente generado por W. De hecho, $|W| = n$, con $n \in \mathbb{N}^+$.

Ejemplo 2.14.2 *Si tomamos el conjunto W definido como en el ejemplo 2.11.3, entonces $\mathcal{M}^{m \times n}(F)$ es finitamente generado por W. Además, $|W| = mn$, con $m, n \in \mathbb{N}^+$.*

Ejemplo 2.14.3 *El espacio vectorial $(F[x], F, +, \cdot)$ es infinitamente generado por W, W definido tal y como se realizó en el ejemplo 2.11.2.*

Un espacio vectorial puede ser finitamente generado e infinitamente generado. Por ejemplo, si tomamos el espacio vectorial $(F^n, F, +, \cdot)$ y

$$W_1 = \{e_i : \ (1 \leq i \leq n \ \ \wedge \ \ n \in \mathbb{N}^+)\}$$

entonces se tiene que $F^n = L(W_1)$, pero también se observa que si $W_2 = F^n$, entonces $F^n = L(W_2)$. En este ejemplo se muestra que un espacio vectorial puede tener varios sistemas generadores.
Para ser más preciso en este aspecto introducimos la siguiente definición:

Definición 2.15 (Estrictamente infinitamente generado) *Un espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ es* `estrictamente infinitamente generado` *si es infinitamente generado y no es finitamente generado.*

Ejemplo 2.15.1 *El espacio vectorial $(F[x], F, +, \cdot)$ es infinitamente generado por W (W definido tal y como se realizó en el ejemplo 2.11.2), como se especificó en* *el ejemplo 2.14.3, más no es finitamente generado, ya que si existe un* $k \in \mathbb{N}^+$, *tal que:*

$$U = \{x, \ldots, x^k\} \subseteq F[x]$$

y además:

$$j = \left(\sum_{n=1}^{k} grad(x^n) \right) + 1$$

y fácilmente se comprueba que $x^j \notin L(U)$.

2.6. Independencia lineal

Definición 2.16 (Independencia lineal de conjuntos finitos) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ *un subconjunto finito de* V, *se dice que* W *es* `linealmente independiente` *o que* $w_1, w_2, \ldots, w_n$ *son linealmente independientes si para cualesquiera* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ *se tiene que:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Si un subconjunto W de un espacio vectorial V no es linealmente independiente, entonces se dice que tal subconjunto es `linealmente dependiente`.
La definición anterior se extiende de forma obvia a un conjunto arbitrario W.

Definición 2.17 (Independencia lineal) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Un subconjunto no vacío* W *de* V *es* `linealmente independiente` *si todo subconjunto finito de* W *es linealmente independiente.*

Por lo tanto, un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos puede ser escrito como combinación lineal de los vectores restantes. Es decir:

$$\forall w \in W[w \notin L(W \backslash \{w\})]$$

y $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ subconjunto de V es `linealmente dependiente` sí y sólo sí existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ no todos nulos, tales que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0$$

Entonces, tenemos las siguientes propiedades:

- Si un conjunto de vectores es linealmente independiente cualquier subconjunto suyo también es linealmente independiente.
- Si un conjunto de vectores es linealmente dependiente también lo es todo conjunto que lo contenga.
- En un subconjunto linealmente independiente ninguno de los elementos del conjunto puede ser el elemento 0_V, es decir, que un conjunto que contenga a 0_V es linealmente dependiente, pues para cualquier $\alpha \in F$, se tiene que $\alpha 0_V = 0_V$ (por proposición 2.2-4).

Ejemplo 2.17.1 *Los elementos de W definidos tal y como se realizó en el ejemplo 2.11.1, es decir:*

$$W = \{e_i : \ (1 \leq i \leq n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+)\}$$

forman una familia linealmente independiente.

Ejemplo 2.17.2 *Si $n, m \in \mathbb{N}^+$ y si se tiene que:*

$$W = \{E_{ij} : \ (1 \leq i \leq m \ \wedge \ 1 \leq j \leq n)\}$$

(definido de manera similar al ejemplo 2.11.3) es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 2.17.3 *El conjunto W del ejemplo 2.11.2 es linealmente independiente. Se puede observar que W es un conjunto infinito, pero por la definición 2.17, para* *ver que W es linealmente independiente basta con ver que cualquier subconjunto finito de este es linealmente independiente. Así que, para todo $n \in \mathbb{N}^+$, se debe probar que $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es linealmente independiente. Supongamos que existen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, tal que:*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0; \qquad \forall x \in \mathbb{C}$$

El teorema fundamental del álgebra garantiza que todo polinomio de grado n, con coeficientes complejos, tiene exactamente n-raíces, no necesariamente distintas, pero en este caso se debe contar las raíces con sus multiplicidades. Entonces es inmediato que debe cumplirse que:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Lema 2.18 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y W un subconjunto linealmente independiente de V. Si $v \in V \backslash W$, se tiene que $W \cup \{v\}$ es linealmente independiente sí y sólo sí v no es combinación lineal de los elementos de W.*

<u>Demostración:</u>

($\Longrightarrow$) Supongamos que v es combinación lineal de los elementos de W. Sin perder generalidad, tomemos un subconjunto finito de W, digamos que es $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subseteq W$, con $n \in \mathbb{N}^+$, en la cual existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, tal que:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \\ v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i &= 0_V \end{aligned}$$

y asumiendo que $\beta_i = -\alpha_i$, se tiene que:

$$1_F v + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_n w_n = 0_V$$

entonces $\{v, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es linealmente dependiente. Contradicción con el hecho de que $W \cup \{v\}$ es linealmente independiente.

$\diamond$

($\Longleftarrow$) Supongamos que $W \cup \{v\}$ es linealmente dependiente. Por tanto existe $X \subseteq W \cup \{v\}$ (X finito) tal que X es linealmente dependiente. Además como W linealmente independiente, necesariamente $v \in X$. Así que podemos suponer, sin perder generalidad:

$$X = \{v, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

en donde $w_i \in W$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Por lo tanto, existen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos, tales que:

$$\begin{aligned} \alpha v + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n &= 0_V \\ \alpha v + (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n) &= 0_V \end{aligned}$$

- Si $\alpha = 0_F$, tenemos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos, tal que

  $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0_V$$

  contradicción con el hecho de que W es linealmente independiente.

- Si $\alpha \neq 0_F$, se tiene que:

  $$\begin{aligned} \alpha v &= -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \\ \alpha v &= \sum_{i=1}^{n} -\alpha_i w_i \\ v &= \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} -\alpha_i w_i \end{aligned}$$

  por propiedad distributiva y asociatividad, se obtiene:

  $$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha^{-1}(-\alpha_i)) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \end{aligned}$$

en donde $\lambda_i = \alpha^{-1}(-\alpha_i)$. Así que v es combinación lineal de $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ y esto es una contradicción con la hipótesis de que v no es combinación lineal de los elementos de W.

$\square$

Definición 2.19 (Linealmente independiente maximal) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $W \subseteq V$*, tal que* W *es no vacío. Diremos que* W *de* V *es* `linealmente independiente maximal` *si:*

1. *W es linealmente independiente.*

2. *$\forall w \in V \setminus W[W \cup \{w\}$ es linealmente dependiente$]$.*

2.7. Base de un espacio vectorial

Definición 2.20 (Base finita) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Si* $\mathfrak{B} \subseteq V$ *y* $\mathfrak{B}$ *es finito, se dice que* $\mathfrak{B}$ *es una* `base finita` *de* V *si se cumple que:*

(i) *$\mathfrak{B}$ es linealmente independiente.*

(ii) $L(\mathfrak{B}) = V$.

Ejemplo 2.20.1 *Si* $W = \{e_i : \ (1 \leq i \leq n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+)\}$*, este conjunto es una base finita para* $(F^n, F, +, \cdot)$*; Puesto que* F^n *es finitamente generado por* W *(por ejemplo 2.14.1) y además* W *es linealmente independiente (por ejemplo 2.17.1). Por lo tanto* W *es una base finita de* F^n *y se le conoce como* `base canónica`.

Ejemplo 2.20.2 *Sabemos que* $(\mathcal{M}^{m\times n}(F), F, +, \cdot)$ *es finitamente generado por* W *definido como en el ejemplo 2.11.3 (por ejemplo 2.14.2) y además* W *es un conjunto linealmente independiente (por ejemplo 2.17.2), entonces* W *es una base finita de* $\mathcal{M}^{m\times n}(F)$ *y tenemos que* W *posee* mn *elementos (con* $m, n \in \mathbb{N}^+$*).*

Teorema 2.21 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial, tal que* V *es distinto del espacio nulo. Sea* $W \subseteq V$ *y* V *finitamente generado por* W*. Sea* U *un subconjunto de* W *linealmente independiente. Entonces existe una base finita* $\mathfrak{B}$ *de* V *tal que:*

$$U \subseteq \mathfrak{B} \subseteq W$$

Demostración:

(i) A continuación se demostrará la existencia de $\mathfrak{B}$ y veremos que $\mathfrak{B} \subseteq W$.
Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y como $U \subseteq W$ (por hipótesis) con $|W| \geq n$.
La idea principal de la prueba es extender el conjunto U hasta obtener una base finita de V.
Si U genera a V, entonces U es una base finita, puesto que U es linealmente independiente (por hipótesis). Pero si U no genera a V, como W genera a V; existe $u_{n+1} \in W \backslash L(U)$. Entonces por el lema 2.18 $U_{n+1} = U \cup \{u_{n+1}\}$ es linealmente independiente. Si U_{n+1} genera a V, entonces esta lista la demostración.
No obstante, si U_{n+1} no genera a V, entonces $U_{n+2} = U_{n+1} \cup \{u_{n+2}\}$ es linealmente independiente (donde $u_{n+2} \in W \backslash L(U_{n+1})$). Así que si U_{n+2} genera a V, esta lista la demostración.
Este proceso debe culminar luego de un número finito de pasos pues V es generado por W y W es finito. Así se continua de este modo el razonamiento hasta U_m y se llega a un conjunto:

$$U_m = U \cup \{u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_m\} = U_{m-1} \cup \{u_m\}$$

que es una base finita de V.

$\diamond$

(ii) $\mathfrak{B} \subseteq W$. Es inmediata de la definición de base finita de V.

$\square$

Del teorema anterior se puede obtener que para espacios vectoriales que poseen una base finita:

- Un subconjunto linealmente independiente en V, esta contenido en una base de V.

- Un subconjunto que genere a V contiene al menos una base de V.

Teorema 2.22 (Existencia de la base) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial, tal que* $V \neq \{0_V\}$ *y es finitamente generado. Entonces existe una base finita para* V.

Demostración:

Supongamos que $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, con $n \in \mathbb{N}^+$ y que W genera a V (por hipótesis, V es finitamente generado). Debemos encontrar un subconjunto U de W, tal que U es linealmente independiente y utilizar el teorema 2.21, para garantizar la existencia de la base.

Sabemos por hipótesis que $L(W) = V$ y $V \neq \{0_V\}$, así que:

$$L(W) = V \neq \{0_V\} \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in W, \ tal \ que \quad x \neq 0_V$$

Entonces $U = \{x\} \subseteq W$, sabemos que $\{x\}$ es un subconjunto linealmente independiente, puesto que:

$$(\alpha x = 0_V) \quad \Longleftrightarrow \quad [(\alpha = 0_V) \quad \vee \quad (x = 0_V)]$$

por teorema 2.2-6 y como $x \neq 0_V$, entonces $\alpha = 0_V$. Como $\{x\} \subseteq W$, entonces por teorema 2.21, existe una base finita $\mathfrak{B}$ de V, tal que:

$$U = \{x\} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq W$$

$\square$

Se pueden realizar algunas observaciones en particular con respecto a las bases de los espacios vectoriales:

- Las bases son conjuntos ordenados.

- Un espacio vectorial puede tener bases diferentes. En general, pueden existir infinitas bases distintas para un mismo espacio vectorial. Por ejemplo, sabemos que:

$$W = \{e_i : \ 1 \leq i \leq n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+\}$$

es una base finita para F^n (por ejemplo 2.20.1). Pero también se tiene que si los elementos $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de F^n son definidos como sigue:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{2, 0, 0, \ldots, 0\} \\ \beta_2 &= \{0, 1, 0, \ldots, 0\} \\ &\vdots \\ \beta_n &= \{0, 0, 0, \ldots, 1\} \end{aligned}$$

entonces $\mathfrak{B} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$, es también una base finita de F^n.

Definición 2.23 (Base de Hamel infinita) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Si $\mathfrak{B} \subseteq V$ y $\mathfrak{B}$ es un conjunto infinito, se dice que $\mathfrak{B}$ es una* `base de Hamel infinita` *de V si se cumple que:*

(i) *$\mathfrak{B}$ es linealmente independiente.*

(ii) *V es estrictamente infinitamente generado por $\mathfrak{B}$.*

Ejemplo 2.23.1 *Si $\mathfrak{B} = \{x^i : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \mathbb{N})\}$ y por el ejemplo 2.15.1, sabemos que $(F[x], F, +, \cdot)$ es estrictamente infinitamente generado por $\mathfrak{B}$. Además por el ejemplo 2.17.3, $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente. Por consiguiente, $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel infinita de $F[x]$.*

Teorema 2.24 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial, tal que $V \neq \{0_V\}$. Sea $W \subseteq V$ y V estrictamente infinitamente generado por W. Sea U un subconjunto de W linealmente independiente. Entonces existe una base de Hamel infinita $\mathfrak{B}$ de V, tal que:*

$$U \subseteq \mathfrak{B} \subseteq W$$

Teorema 2.25 (Existencia de la base) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial, tal que $V \neq \{0_V\}$ y es estrictamente infinitamente generado. Entonces existe al menos una base de Hamel infinita para V.*

Para la demostración del teorema 2.24 y 2.25 hay que utilizar una herramienta un poco más sofisticada, como el lema de Zorn (Lema A.14 o su equivalente el axioma de elección) y en el próximo capítulo se realizará la demostración.

2.8. Dimensión de un espacio vectorial

Lema 2.26 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathfrak{B}$ una base finita de V (es decir, $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, con $n \in \mathbb{N}^+$). Entonces:*

(a) *Si un subconjunto de V tiene más de n elementos, entonces este subconjunto es linealmente dependiente.*

(b) *Si un subconjunto de V tiene menos de n elementos, entonces este subconjunto no genera a V.*

<u>Demostración:</u>

(a) Sea $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V$ (con $m \in \mathbb{N}^+$), tal que $m > n$.

Ya que:

$$\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \qquad \textit{con } n \in \mathbb{N}^+$$

es una base finita de V, entonces para cada $w_j \in W$ existen $\alpha_{ij} \in F$ (en donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$) tales que podemos escribir los elementos de W como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$ (por definición 2.20, $\mathfrak{B}$ genera a V y entonces cada elemento puede expresarse en forma única como combinación lineal de elementos de $\mathfrak{B}$, por proposición 2.10) así que:

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{n1}v_n \\ w_2 & = & \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{n2}v_n \\ \vdots & = & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \quad \vdots \\ w_m & = & \alpha_{1m}v_1 + \alpha_{2m}v_2 + \cdots + \alpha_{nm}v_n \end{array} \tag{2.22}$$

Para probar que W es linealmente dependiente se debe encontrar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$ no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j = 0 \tag{2.23}$$

Usando las ecuaciones 2.22 y 2.23, podemos reescribir 2.23 como:

$$\lambda_1(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{n1}v_n) + \cdots + \lambda_m(\alpha_{1m}v_1 + \alpha_{2m}v_2 + \cdots + \alpha_{nm}v_n) = 0$$

por consiguiente, por propiedad distributiva, la asociatividad y conmutatividad se obtiene que:

$$(\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \cdots + \lambda_m\alpha_{1m})v_1 + \cdots + (\lambda_1\alpha_{n1} + \lambda_2\alpha_{n2} + \cdots + \lambda_m\alpha_{nm})v_n = 0$$

Así que, de la independencia lineal de $\mathfrak{B}$ (definición 2.20), el problema de probar que W es un subconjunto linealmente dependiente, se reduce a encontrar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$ no todos nulos, tales que satisfacen el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1m}\lambda_m & = & 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2m}\lambda_m & = & 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad & = & \vdots \\ \alpha_{n1}\lambda_1 + \alpha_{n2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{nm}\lambda_m & = & 0 \end{array} \tag{2.24}$$

pero como $m > n$, el sistema de ecuaciones lineales 2.24 tiene más variables que ecuaciones, entonces el teorema B.6, nos garantiza la existencia de soluciones no triviales. Por lo tanto, el subconjunto W es linealmente dependiente.

$\diamond$

(b) Sea $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subseteq V$ (con $m \in \mathbb{N}^+$), tal que $m < n$. Se debe demostrar que U no genera a V. Vamos a realizar esta demostración por reducción al absurdo, suponemos que U genera a V y se llega a la conclusión de que $\mathfrak{B}$ es linealmente dependiente (contradicción con el hecho de que $\mathfrak{B}$ es una base finita).

Supongamos que U es un sistema generador de V (es decir, $L(U) = V$); entonces por definición de $L(U)$, cada elemento de V se puede escribir como combinación lineal de los elementos de U. En particular, los elementos de la base finita $\mathfrak{B}$, $v_i \in \mathfrak{B}$ ($1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}^+$) se escriben como combinación lineal de los elementos de U, es decir, existen $\alpha_{ij} \in F$ y $u_j \in U$, tales que:

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{m1}u_m \\ v_2 & = & \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \cdots + \alpha_{m2}u_m \\ \vdots & = & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \quad\; \vdots \\ v_n & = & \alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \cdots + \alpha_{mn}u_m \end{array} \tag{2.25}$$

entonces, obtenemos la contradicción de demostrar que existen
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ no todos nulos, tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \tag{2.26}$$

Pero sustituyendo 2.25 y 2.26, obtenemos que:

$$\lambda_1(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{m1}u_m) + \cdots + \lambda_n(\alpha_{1n}u_1 + \alpha_{2n}u_2 + \cdots + \alpha_{mn}u_m) = 0$$

Así que:

$$(\lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \cdots + \lambda_n\alpha_{1n})u_1 + \cdots + (\lambda_1\alpha_{m1} + \lambda_2\alpha_{m2} + \cdots + \lambda_n\alpha_{mn})u_m = 0$$

Ahora como $m < n$, sabemos que todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente, debe ser también linealmente independiente, es decir:

$$[(U \subseteq W \quad \wedge \quad W \ es \ l.i) \quad \Longrightarrow \quad U \ es \ l.i]$$

por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{1n}\lambda_n & = & 0 \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{2n}\lambda_n & = & 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots & = & \vdots \\ \alpha_{m1}\lambda_1 + \alpha_{m2}\lambda_2 + \cdots + \alpha_{mn}\lambda_n & = & 0 \end{array} \tag{2.27}$$

pero como $m < n$, este sistema de ecuaciones lineales homogéneas tiene más variables que ecuaciones y por el teorema B.6, nos garantiza que este sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ no triviales (es decir, no todos nulos), entonces $\mathfrak{B}$ es linealmente dependiente. Contradicción con el hecho de que $\mathfrak{B}$ es una base finita (definición 2.20) y debe cumplirse que $\mathfrak{B}$ sea linealmente independiente.

$\square$

Teorema 2.27 (Teorema de la dimensión) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ ambas bases finitas de V. Entonces $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ poseen el mismo número de elementos.*

<u>Demostración:</u>

Sean

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{B} & = & \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ \mathfrak{B}' & = & \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \end{array}$$

las bases finitas de V (que existen por teorema 2.22), en donde $n, m \in \mathbb{N}^+$. Como $n, m \in \mathbb{N}^+$ y $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (por ejemplo A.4.2), se tiene que cumplir que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}[(n \leq m \quad \wedge \quad m \leq n) \quad \Longrightarrow \quad (m = n)]$$

es decir, debe cumplirse la antisimetría (definición A.4).

Entonces debemos probar para cuando:

(a) $n \leq m$.

(b) $m \leq n$.

Ahora:

(a) Si $n \leq m$, entonces $n = m$ ó $n < m$, por lo tanto, lo único que nos falta por demostrar es que pasa cuando $n < m$.

Sabemos que $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base finita de V (por hipótesis) y por el lema 2.26-a, tenemos que todo subconjunto de V que tiene más de n elementos en V es linealmente dependiente. Contradicción con el hecho de que $\mathfrak{B}'$ es una base finita de V.

(b) Si $m \leq n$, entonces de igual forma que el anterior debe cumplirse que $n = m$ ó $m < n$, por lo tanto, nos falta por ver que pasa cuando $m < n$. Por hipótesis $\mathfrak{B}$ es una base de V y por lema 2.26-b, tenemos que si subconjunto de V tiene menos de n elementos en V, entonces este subconjunto no genera a V, contradicción con el hecho de que $\mathfrak{B}'$ es una base finita de V.

$\square$

Corolario 2.28 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathfrak{B}$ una base finita de V. Entonces $\mathfrak{B}$ es un conjunto linealmente independiente maximal.*

Teorema 2.29 (Teorema de Löwig) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ ambas bases infinitas de V. Si $|\mathfrak{B}| = \kappa$ y $|\mathfrak{B}'| = \mu$ (en donde κ, μ son cardinales infinitos), entonces $\kappa = \mu$.*

Es decir, que dos bases cualesquiera de un espacio vectorial V sobre el cuerpo F son equipotentes. La demostración del teorema 2.29 se deja para el próximo capítulo, y para realizarla se necesitan herramientas de la aritmética transfinita.

Definición 2.30 (Dimensión finita) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathfrak{B}$ una base finita de V. La* `dimensión` *del espacio vectorial V sobre el cuerpo F es el número de elementos que posee la base finita $\mathfrak{B}$ de V. En este caso, se dice que el espacio vectorial es de* `dimensión finita`.

La dimensión del espacio vectorial la denotamos como $\mathbf{dim}_F V$ y cuando no haya ambigüedad sobre F simplemente como $\mathbf{dim} V$.

Ejemplo 2.30.1 *Sabemos que $V = \{0_V\}$ es un espacio vectorial y la*

$$\boldsymbol{dim}_F\{0_V\} = 0$$

A este espacio vectorial usualmente se le conoce como `espacio vectorial trivial` *y la base de V es $\mathfrak{B} = \emptyset$.*

Ejemplo 2.30.2 *Tenemos que $\mathfrak{B} = \{e_i : \ (1 \leq i \leq n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+)\}$ es una base finita del espacio vectorial $(F^n, F, +, \cdot)$ (por ejemplo 2.1.1) y además se tiene que $|\mathfrak{B}| = n$, entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F F^n = n; \quad con \ n \in \mathbb{N}^+$$

Ejemplo 2.30.3 *Se tiene que $(\mathcal{M}^{m\times n}(F), F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial (por ejemplo 2.1.7) y además:*

$$\mathfrak{B} = \{E_{ij} : \ (1 \leq i \leq m \ \wedge \ 1 \leq j \leq n)\}$$

es una base finita para $\mathcal{M}^{m\times n}(F)$ (por ejemplo 2.20.2). Entonces, $|\mathfrak{B}| = mn$ y así que:

$$\boldsymbol{dim}_F \mathcal{M}^{m\times n}(F) = mn; \qquad con \ m, \ n \in \mathbb{N}^+$$

Definición 2.31 (Dimensión de Hamel) *Sea κ un cardinal infinito y $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Diremos que el espacio vectorial V sobre el cuerpo F es de* `dimensión` κ *si existe una base de Hamel infinita $\mathfrak{B}$ de V, tal que:*

$$|\mathfrak{B}| = \kappa.$$

Entonces se dice que el espacio vectorial V sobre el cuerpo F es de `dimensión infinita` *(o* `infinito dimensional`*).*

Ejemplo 2.31.1 *Por ejemplo 2.23.1 sabemos que $\mathfrak{B} = \{x^i : \ 0 \leq i < \infty, \ i \in \mathbb{N}\}$ es una base para el espacio vectorial $(F[x], F, +, \cdot)$ y además $|\mathfrak{B}| = \aleph_0$, es decir:*

$$\boldsymbol{dim}_F F[x] = \aleph_0$$

en donde $\aleph_0$ es el cardinal del conjunto de los números naturales.

Ejemplo 2.31.2 *Se tiene por el ejemplo 2.1.4 que $(\mathcal{C}[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y este posee dimensión infinita. Este tipo de espacios vectoriales serán tratados con más detalles en el próximo capítulo.*

2.9. Espacio cociente

Definición 2.32 (Congruencia) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y W un subespacio de V. Definimos en V la relación de* `congruencia` *módulo W mediante:*

$$v \equiv w (mod \ W) \quad \Longleftrightarrow \quad v - w \in W$$

para cualesquiera $v, w \in V$.

Es de notar que la relación de congruencia módulo W define una relación de equivalencia sobre V y eso es lo que vamos a demostrar a continuación. Para esto debemos comprobar que se cumplen las propiedades que caracterizan las relaciones de equivalencia (definición A.2).

(i) Reflexividad. $v \equiv v(mod\ W)$, es claro que $v - v = 0_V$ y por definición de subespacio (definición 2.3) se tiene que $0_V \in W$.

(ii) Simetría. $v \equiv w(mod\ W)$, entonces por definición de congruencia (definición 2.32) $v - w \in W$ y por la definición 2.3 se tiene que $-(v - w) \in W$ y por la proposición 2.2-7 y conmutatividad, se obtiene:

$$w - v = -(v - w) \in W, \ \ asi \ \ que \ \ w \equiv v(mod\ W).$$

(iii) Transitividad. Si tenemos que $v \equiv w(mod\ W)$ y $w \equiv z(mod\ W)$, entonces por definición de congruencia (definición 2.32) $v - w \in W$ y además $w - z \in W$; por la definición 2.3 (definición de subespacio) tenemos que:

$$(v - w) + (w - z) \in W$$

y por asociatividad, existencia del elemento opuesto y el elemento neutro de la definición 2.1, tenemos que:

$$(v - w) + (w - z) = v - z \in W; \ \ por \ \ tanto \quad v \equiv z(mod\ W).$$

La clase de equivalencia de un elemento $v \in V$ es:

$$[v] = v + W = \{v + w : \ \ w \in W\} \tag{2.28}$$

Definición 2.33 (Conjunto cociente) *Sea A un conjunto no vacío y R una relación de equivalencia en A, se llama* `conjunto cociente` *de A por R al conjunto:*

$$A/R = \{[a] : \ \ a \in A\}$$

Puesto que la relación de congruencia módulo W define una relación de equivalencia, entonces sin perder generalidad, podemos decir que si $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V, entonces:

$$V/W = \{[v] : \ \ v \in V\} \tag{2.29}$$

Proposición 2.34 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* W *un subespacio vectorial de* V*. El conjunto cociente es un espacio vectorial sobre el cuerpo* F*, con las operaciones dadas por:*

$$(v + W) \oplus (w + W) \;=\; (v + w) + W \tag{2.30}$$

$$\alpha \odot (v + W) \;=\; \alpha v + W \tag{2.31}$$

para todo $\alpha \in F$*,* $\; v, w \in V$*. Es decir,* $(V/W, F, \oplus, \odot)$ *es un espacio vectorial y se le conoce como* `espacio cociente` *de* V *por* W*.*

<u>Demostración</u>:

En primer lugar hay que probar que las operaciones de adición y multiplicación escalar están bien definidas, en el sentido de obtener resultados únicos, independientemente de los representantes de cada clase. Por lo tanto, veamos que:

(i) La suma esta bien definida.

Se debe demostrar que si $u, v, u', v' \in V$ y

$$v + W \;=\; v' + W \tag{2.32}$$

$$u + W \;=\; u' + W \tag{2.33}$$

entonces:

$$(u + v) + W = (u' + v') + W$$

Ahora observemos que si tenemos 2.32 (y 2.33) entonces, como v y v' deben ser congruentes módulo W (de igual forma para u y u'), por consiguiente por definición 2.32 tenemos que $v - v' \in W$ (y $u - u' \in W$) y puesto que W es un subespacio de V (por hipótesis) y por proposición 2.4, se obtiene:

$$(v - v') + (u - u') \in W$$

y por definición 2.3 (definición de subespacio) y por proposición 2.2-7, tenemos que:

$$(u + v) - (u' + v') \in W$$

así que por definición 2.32

$$u + v \equiv u' + v'(mod\ W)$$

entonces:

$$(u + v) + W = (u' + v') + W$$

(ii) La multiplicación escalar esta bien definida.

Se debe ver que si $v, v' \in V$ y $\alpha \in F$, se tiene que:

$$v + W = v' + W \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \odot (v + W) = \alpha \odot (v' + W)$$

es decir:

$$\alpha v + W = \alpha v' + W$$

Como $v + W = v' + W$, entonces v y v' son congruentes módulo W y por definición 2.32 (definición de congruencia) se tiene que $v - v' \in W$ y puesto que W es un subespacio de V y por proposición 2.4, tenemos que:

$$\alpha(v - v') \in W$$

y por la definición 2.1-V5 y proposición 2.2-7 obtenemos que:

$$\alpha v - \alpha v' \in W$$

entonces aplicando la definición de congruencia (definición 2.32), tenemos lo siguiente:

$$\alpha v \equiv \alpha v'(mod\ W)$$

así que:

$$\alpha \odot (v + W) = \alpha v + W = \alpha v' + W = \alpha \odot (v' + W)$$

$\diamond$

Ahora falta probar que se cumplen las propiedades para espacios vectoriales en $(V/W, F, \oplus, \odot)$. Así que, sea

$$\begin{aligned}
[v] &= a + W \in V/W, && \text{con } a \in V,\\
[w] &= b + W \in V/W, && \text{con } b \in V,\\
[z] &= c + W \in V/W, && \text{con } c \in V.
\end{aligned}$$

y además $\alpha, \beta \in F$. Así debemos probar las propiedades $V1 - V8$ de la definición 2.1, por lo tanto:

(V1) $[v] \oplus [w] = [w] \oplus [v]$

$$\begin{aligned}
[v] \oplus [w] &= (a + W) \oplus (b + W)\\
&= (a + b) + W && \star \text{ Por 2.30.}\\
&= (b + a) + W && \star \text{ Por definición 2.1-V1 en } V.\\
&= (b + W) \oplus (a + W) && \star \text{ Por 2.30.}\\
&= [w] \oplus [v]
\end{aligned}$$

(V2) $([v] \oplus [w]) \oplus [z] = [v] \oplus ([w] \oplus [z])$

$$\begin{aligned}
([v] \oplus [w]) \oplus [z] &= ((a + W) \oplus (b + W)) \oplus (c + W)\\
&= ((a + b) + W) \oplus (c + W) && \star \text{ Por 2.30.}\\
&= ((a + b) + c) + W && \star \text{ Por 2.30.}\\
&= (a + (b + c)) + W && \star \text{ Por def. 2.1-V2 en } V.\\
&= (a + W) \oplus ((b + c) + W) && \star \text{ Por 2.30.}\\
&= (a + W) \oplus ((b + W) \oplus (c + W)) && \star \text{ Por 2.30.}\\
&= [v] \oplus ([w] \oplus [z])
\end{aligned}$$

(V3) El elemento neutro de V/W es:

$$[0_V] = 0_V + W$$

puesto que:

$$\begin{aligned}
(0_V + W) \oplus (a + W) &= (0_V + a) + W && \star \text{ Por 2.30.}\\
&= a + W && \star \text{ Por def. 2.1-V3 en } V.
\end{aligned}$$

(V4) El elemento opuesto de $[v] \in V/W$ es:

$$-[v] = -a + W$$

puesto que:

$$\begin{aligned}
[v] \oplus (-[v]) &= (a+W) \oplus (-a+W) & \\
&= (a-a)+W & \star \text{ Por 2.30.} \\
&= 0_V + W & \star \text{ Por def. 2.1-V4 en } V.
\end{aligned}$$

(V5) $\alpha \odot ([v] \oplus [w]) = (\alpha \odot [v]) \oplus (\alpha \odot [w])$

$$\begin{aligned}
\alpha \odot ([v] \oplus [w]) &= \alpha \odot ((a+W) \oplus (b+W)) & \\
&= \alpha \odot ((a+b)+W) & \star \text{ Por 2.30.} \\
&= (\alpha(a+b))+W & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= (\alpha a + \alpha b) + W & \star \text{ Por def. 2.1-V5 en } V. \\
&= (\alpha a + W) \oplus (\alpha b + W) & \star \text{ Por 2.30.} \\
&= (\alpha \odot (a+W)) \oplus (\alpha \odot (b+W)) & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= (\alpha \odot [v]) \oplus (\alpha \odot [w]) &
\end{aligned}$$

(V6) $(\alpha+\beta) \odot [v] = (\alpha \odot [v]) \oplus (\beta \odot [v])$

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta) \odot [v] &= (\alpha+\beta) \odot (a+W) & \\
&= (\alpha+\beta)a + W & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= (\alpha a + \beta a) + W & \star \text{ Por def. 2.1-V6 en } V. \\
&= (\alpha a + W) \oplus (\beta a + W) & \star \text{ Por 2.30.} \\
&= (\alpha \odot (a+W)) \oplus (\beta \odot (a+W)) & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= (\alpha \odot [v]) \oplus (\beta \odot [v]) &
\end{aligned}$$

(V7) $\alpha \odot (\beta \odot [v]) = (\alpha \odot \beta) \odot [v]$

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (\beta \odot [v]) &= \alpha \odot (\beta \odot (a + W)) & \\
&= \alpha \odot (\beta a + W) & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= \alpha(\beta a) + W & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= (\alpha\beta)a + W & \star \text{ Por def. 2.1-V7 en } V. \\
&= (\alpha\beta) \odot (a + W) & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= (\alpha \odot \beta) \odot [v] &
\end{aligned}$$

(V8) $1_F \odot [v] = [v]$

$$\begin{aligned}
1_F \odot [v] &= 1_F \odot (a + W) & \\
&= 1_F a + W & \star \text{ Por 2.31.} \\
&= a + W & \star \text{ Por def. 2.1-V8 en } V. \\
&= [v] &
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.34.1 *Si tomamos el ejemplo 2.1.1 y decimos que* $F^2 = \mathbb{R}^2$*, entonces sabemos que* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial y si definimos:*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x + 2y = 0\}$$

es fácil ver que $W \leq \mathbb{R}^2$*. Así que se determinará la clase de equivalencia de* $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$*. Como anteriormente se ha visto, esta clase es el conjunto* $(1, 1) + W$ *y por consiguiente:*

$$\begin{aligned}
(1, 1) + W &= \{(1, 1) + (x, y) : \ 3x + 2y = 0\} \\
&= \{(1 + x, 1 + y) : \ 3x + 2y = 0\} \\
&= \{(u, v) : \ 3u + 2v = 5\}
\end{aligned}$$

En general, para este ejemplo, la clase de equivalencia de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *es:*

$$(a, b) + W = \{(a + x, b + y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x + 2y = 0\}$$

Ejemplo 2.34.2 *Sabemos por el ejemplo 2.1.1 que* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial (con* $n \in \mathbb{N}^+$*) y además es sencillo comprobar que:*

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$*, en donde* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$*. Así que:*

$$\mathbb{R}^n/W = \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) + W : \ \ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ n \in \mathbb{N}^+\}$$

Entonces $(\mathbb{R}^n/W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por escalar definidas como en el ejemplo 2.1.1.*
Si se fija el vector $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, entonces un vector arbitrario* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ *pertenece a la clase de equivalencia* $y + W$ *sí y sólo sí:*

$$\alpha_1(w_1 - y_1) + \alpha_2(w_2 - y_2) + \cdots + \alpha_n(w_n - y_n) = 0$$

Ejemplo 2.34.3 *Tenemos que* $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial (por ejemplo 2.1.1) y además si:*

$$W = \{(x_1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x_1 \in \mathbb{R}\}$$

se tiene que $W \leq \mathbb{R}^3$*. Entonces* $(\mathbb{R}^3/W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio cociente de* $\mathbb{R}^3$ *por* W*.*

Ejemplo 2.34.4 *Se tiene que* $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial (por ejemplo 2.1.3) y sea:*

$$W = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} : \ \ (f(t) = 0, \ \ \forall t \in [0, 1])\}$$

Entonces $(\mathbb{R}^\mathbb{R}/W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio cociente de* $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ *por* W*.*

2.10. Teoremas de la dimensión

Definición 2.35 (Codimensión) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial, la* `codimensión` *(con respecto a* V*) de un subespacio* W *de* V*, denotada por* $\boldsymbol{codim}_F W$*, es la dimensión del espacio vectorial* $(V/W, F, \oplus, \odot)$*.*

Ejemplo 2.35.1 *Por el ejemplo 2.34.3 tenemos que* $(\mathbb{R}^3/W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial. Por lo tanto, sabemos que:*

$$\mathfrak{B} = \{e_i : \ (1 \leq i \leq 3 \ \wedge \ i \in \mathbb{N}^+)\}$$

es una base finita para $\mathbb{R}^3$ *(por ejemplo 2.20.1) y es fácil ver que* $\mathfrak{B}' = \{[e_2], [e_3]\}$ *es una base finita de* $\mathbb{R}^3/W$*, siendo:*

$$\begin{array}{rcccl} [e_2] & = & e_2 + W & = & \{(x_1, 1, 0) : \ x_1 \in \mathbb{R}\} \\ [e_3] & = & e_3 + W & = & \{(x_1, 0, 1) : \ x_1 \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

y se tiene además que $|\mathfrak{B}'| = 2$*, por lo tanto:*

$$\boldsymbol{codim}_F W = 2$$

Teorema 2.36 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* $W \leq V$*. Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F W + \boldsymbol{dim}_F (V/W) = \boldsymbol{dim}_F V \tag{2.34}$$

Es decir:

$$\boldsymbol{dim}_F W + \boldsymbol{codim}_F W = \boldsymbol{dim}_F V \tag{2.35}$$

Demostración:

Supongamos que $\mathbf{dim}_F V = n$ (con $n \in \mathbb{N}^+$) y $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ (con $m \in \mathbb{N}^+$) una base de W. Por definición de base (definición 2.20) $\mathfrak{B}'$ es linealmente independiente, por consiguiente podemos aplicar el teorema 2.21 (teorema de extensión de conjuntos linealmente independientes a bases) y extender el conjunto $\mathfrak{B}'$ hasta encontrar una base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V.

Se debe demostrar que:

$$\mathfrak{B}'' = \{[v_{m+1}], [v_{m+2}], \ldots, [v_n]\}$$

es una base de V/W. Veamos:

($\star$) $\mathfrak{B}''$ genera a V/W.

Sea $[v] \in V/W$, entonces $v \in V$ (por definición A.3: definición de clase de equivalencia), así que v se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$ (puesto que $\mathfrak{B}$ es una base finita de V), así que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

en donde $\alpha_i \in F$ y $1 \leq i \leq n$. Como tenemos que $[v] \in V/W$, entonces:

$$\begin{aligned} [v] &= \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i v_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [v_i] \end{aligned}$$

pero cuando $1 \leq i \leq m$, entonces:

$$[v_i] = v_i + W = \{v_i + w : \ w \in W\} = W$$

puesto que $v_i \in W$, así que:

$$[v_i] = W \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_i \in W$$

por lo tanto, $[0_V] = [v_i]$, para $1 \leq i \leq m$. Entonces:

$$[v] = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j [v_j]$$

y con esto demostramos que $\mathfrak{B}'' = \{[v_{m+1}], [v_{m+2}], \ldots, [v_n]\}$ genera a V/W.

($\star\star$) $\mathfrak{B}''$ es linealmente independiente.

Supongamos que existen escalares $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n \in F$, tales que:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j [v_j] = 0$$

entonces $w = \alpha_{m+1}v_{m+1} + \alpha_{m+2}v_{m+2} + \cdots + \alpha_n v_n \in W$ y como $\mathfrak{B}'$ es una base de W, entonces $w \in W$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}'$, así que:

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

y por consiguiente:

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = \alpha_{m+1}v_{m+1} + \alpha_{m+2}v_{m+2} + \cdots + \alpha_n v_n$$

entonces:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m - \alpha_{m+1}v_{m+1} - \alpha_{m+2}v_{m+2} - \cdots - \alpha_n v_n = 0_V$$

y como $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es una base finita de V, entonces:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = -\alpha_{m+1} = \cdots = -\alpha_n = 0_V$$

y por consiguiente:

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \cdots = \alpha_n = 0_V$$

y por lo tanto, $\mathfrak{B}''$ es linealmente independiente.

Entonces, $\mathfrak{B}''$ es una base de V/W.

También tenemos que $|\mathfrak{B}''| = n - m$, es decir:

$$\mathbf{dim}_F V/W = n - m = \mathbf{codim}_F W$$

y además, $|\mathfrak{B}'| = m$. Entonces se obtiene la siguiente igualdad:

$$\mathbf{dim}_F W + \mathbf{dim}_F (V/W) = \mathbf{dim}_F V$$

$\square$

En este teorema, además se demostró que si $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $(V/W, F, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

Es importante también destacar que en el teorema anterior no sólo probamos el resultado sobre la dimensión del espacio cociente, sino que además se describe un procedimiento para encontrar una base del espacio cociente de V por W, a partir de una base de W, que completamos a una base de V.

Ejemplo 2.36.1 *Del ejemplo 2.35.1 tenemos que* $\boldsymbol{codim}_F W = 2$ *y además del ejemplo 2.30.2 obtenemos que* $\boldsymbol{dim}_F \mathbb{R}^3 = 3$*, así que aplicando el teorema 2.36 se obtiene que:*

$$\boldsymbol{dim}_F W = 1.$$

Es de notar que este teorema es válido aún cuando el espacio vectorial es de dimensión infinita, en este capítulo sólo se dará el enunciado y la demostración se realizará en el próximo capítulo.

Teorema 2.37 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión infinita y* W *un subespacio vectorial de* V*. Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F W + \boldsymbol{dim}_F (V/W) = \boldsymbol{dim}_F V$$

Teorema 2.38 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* W *un subespacio vectorial propio de* V*. Entonces* W *es de dimensión finita y*

$$\boldsymbol{dim}_F W < \boldsymbol{dim}_F V \tag{2.36}$$

Demostración:

Por hipótesis se tiene que $W \leq V$ y por la proposición 2.4 tenemos que $W \neq \emptyset$, así que podemos suponer que existe $w \in W$, tal que $w \neq 0_V$ (puesto que sino existe $w \neq 0_V$, solo $w = 0_V$, entonces por el ejemplo 2.30.1 $\mathbf{dim}_F W = 0$ y la desigualdad se cumple de inmediato). Entonces por el teorema 2.22 existe una base de W y es evidente que w es linealmente independiente (puesto que si $\alpha w = 0_V$, entonces por la proposición 2.2-6 se tiene que $\alpha = 0_V$ ó $w = 0_V$, pero como $w \neq 0_V$, entonces $\alpha = 0_V$). Por consiguiente, por el teorema 2.21 existe una ase finita de W tal que

$$\{w\} \subseteq \mathfrak{B}' \qquad (\mathfrak{B}' \textit{ base de } W)$$

y esta base no contiene más de n elementos por el lema 2.26-(a) (siendo $n = \mathbf{dim}_F V$, con $n \in \mathbb{N}$), puesto que si $\mathfrak{B}'$ tiene más de n elementos, entonces $\mathfrak{B}'$ es linealmente dependiente y esto es una contradicción con el hecho de que $\mathfrak{B}'$ es una base de W. Puesto que $\mathfrak{B}'$ es un conjunto linealmente independiente (por definición de base) y por el teorema 2.21 $\mathfrak{B}'$ debe de estar contenida en una base finita de V. Luego, W es de dimensión finita y

$$\mathbf{dim}_F W \leq \mathbf{dim}_F V$$

Como por hipótesis W es un subespacio propio de V, entonces existe $v \in V$, tal que $v \notin W$, es decir, $v \in V \backslash W$, así que $\mathfrak{B}' \cup \{v\}$ es linealmente independiente, entonces v no es combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}'$ (por el lema 2.18), por lo tanto $\mathfrak{B}'$ no genera a V y así concluimos que:

$$\mathbf{dim}_F W < \mathbf{dim}_F V$$

□

Consideremos el siguiente lema, que utilizaremos en la demostración del próximo teorema.

Lema 2.39 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita (es decir, $\boldsymbol{dim}_F V = n$, con $n \in \mathbb{N}$) y W un subespacio de V que contiene un subconjunto linealmente independiente con n elementos. Entonces $W = V$.*

Demostración:

($\subseteq$) $W \subseteq V$.

Es inmediata de la definición de subespacio (definición 2.3).

◇

($\supseteq$) $V \subseteq W$.

Sea $v \in V$ y sean $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subseteq W$ un subconjunto linealmente independiente. Entonces por el lema 2.26-(a) se tiene que $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, v\}$ es un conjunto linealmente dependiente, así que existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha \in F$, no todos nulos, tales que:

$$\alpha v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0$$

por consiguiente:

($\star$) Si $\alpha = 0$, tenemos que $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es un conjunto linealmente dependiente, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es linealmente independiente.

($\star\star$) Si $\alpha \neq 0$, entonces

$$\alpha v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha v &= -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \\ v &= \sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1}(-\alpha_i) w_i \\ v &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \end{aligned}$$

en donde $\lambda_i = \alpha^{-1}(-\alpha_i)$ y como por hipótesis W es un subespacio de V, aplicando la proposición 2.4, obtenemos que $v \in W$. Así que $V \subseteq W$.

Por lo tanto de ($\subseteq$) y ($\supseteq$), tenemos que $W = V$.

$\square$

Además, se tiene que:

Teorema 2.40 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita y $W \leq V$. Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F W = \boldsymbol{dim}_F V \quad \Longleftrightarrow \quad W = V \tag{2.37}$$

Demostración:

($\Longrightarrow$) $\mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V \quad \Longrightarrow \quad W = V$.

Sean

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ \mathfrak{B}' &= \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N}$, ambas bases finitas de V y W respectivamente. Tenemos por hipótesis que W es un subespacio de V y además $\mathfrak{B}' \subseteq W$ es un subconjunto linealmente independiente con n elementos, entonces por el lema 2.39 se tiene que $W = V$.

($\Longleftarrow$) $W = V \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V$.

Es inmediata del teorema 2.27.

Entonces de ($\Longrightarrow$) y ($\Longleftarrow$) obtenemos que

$$\mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V \quad \Longleftrightarrow \quad W = V$$

$\square$

Cuando el espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ es de dimensión infinita, este teorema no es cierto, es decir, no es necesario que se cumpla

$$\mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V \quad \Longrightarrow \quad W = V$$

y esto lo podemos ver reflejado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.40.1 *Sea F un cuerpo. Sabemos por ejemplo 2.1.5 que $(F[x], F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y además por el ejemplo 2.31.1 tenemos que:*

$$\boldsymbol{dim}_F F[x] \quad = \quad \aleph_0 \tag{2.38}$$

y si se tiene que:

$$W \quad = \quad \{\alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{2m} x^{2m} + \cdots : (\alpha_i \in F,\ \ 0 \leq 2i < \infty),$$

$$tal\ \ que\ \ \exists m \in \mathbb{N}, k > m \Longrightarrow \alpha_{2k} = 0\}$$

entonces $W < V$. Además:

$$\mathfrak{B}' = \{x^{2i} :\ \ 0 \leq i < \infty \ \ \wedge \ \ i \in \mathbb{N}\}$$

es una base de W y también se tiene que $|\mathfrak{B}'| = \aleph_0$, así que:

$$\boldsymbol{dim}_F W \quad = \quad \aleph_0 \tag{2.39}$$

Por lo tanto tenemos de las ecuaciones 2.38 y 2.39 que:

$$\boldsymbol{dim}_F F[x] = \aleph_0 = \boldsymbol{dim}_F W$$

pero $W \neq V$.

Por lo tanto este es un ejemplo que nos muestra que en espacios vectoriales de dimensión infinita no necesariamente se cumple que:

$$\mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V \quad \Longrightarrow \quad W = V$$

Entonces podemos proceder a enunciar el siguiente teorema, y la demostración queda postergada para el siguiente capítulo.

Teorema 2.41 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita. Para cada subespacio vectorial W de V, entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F W \leq \boldsymbol{dim}_F V.$$

2.11. Suma directa interna

Se puede volver a evaluar la definición 2.6 (definición de suma) y considerarlas para un número cualquiera de subespacios de un espacio vectorial.

Definición 2.42 (Suma) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Llamaremos la* `suma` *de una familia de subespacios vectoriales* $\{W_i\}_{i\in I}$ *de* V *al subespacio:*

$$L\left(\bigcup_{i\in I} W_i\right)$$

la cual denotamos como:

$$\sum_{i\in I} W_i$$

En particular, si la familia de subespacio es finita (es decir, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$*), entonces:*

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \{w_1 + w_2 + \cdots + w_n : \ \ w_i \in W_i\}$$

Definición 2.43 (Subespacios independientes) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios vectoriales de* V*. Se dice que la familia de subespacios* $\{W_i\}_{i\in I}$ *de* V *son* `independientes` *si para cada índice* $i \in I$ *se tiene que:*

$$W_i \cap \left(\sum_{i\neq j} W_j\right) = \{0_V\}$$

Definición 2.44 (Suma directa interna) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. La* `suma directa interna` *de una familia de subespacios* $\{W_i\}_{i\in I}$ *de* V *se escribe como:*

$$V = \bigoplus_{i\in I} W_i$$

si se cumple lo siguiente:

(i) *V es la suma de la familia de subespacios $\{W_i\}_{i\in I}$*

$$V = \sum_{i\in I} W_i \tag{2.40}$$

(ii) *La familia de subespacios vectoriales $\{W_i\}_{i\in I}$ de V son independientes, es decir:*

$$W_i \cap \left(\sum_{i\neq j} W_j\right) = \{0_V\} \tag{2.41}$$

Si I es un conjunto finito, entonces la suma directa interna podemos escribirla como:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$$

en donde $n \in \mathbb{N}^+$.

Ejemplo 2.44.1 *Sea F un cuerpo y $n \in \mathbb{N}^+$. Considérese:*

$$F^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) : \ (\alpha_i \in F \ \ \wedge \ \ 1 \leq i \leq n)\}$$

y se define:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(\alpha_1, 0, \ldots, 0) \in F^n : \ \alpha_1 \in F\} \\ F_2 &= \{(0, \alpha_2, \ldots, 0) \in F^n : \ \alpha_2 \in F\} \\ &\vdots \\ F_n &= \{(0, 0, \ldots, \alpha_n) \in F^n : \ \alpha_n \in F\} \end{aligned}$$

Es de notar que $F_1 \leq F^n, F_2 \leq F^n, \ldots, F_n \leq F^n$ y además si $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ se tiene que:

$$F_i \cap \left(\sum_{i\neq j} F_j\right) = \{0_{F^n}\}$$

También tenemos que:

$$F^n = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

puesto que si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, entonces:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, 0, \ldots, 0) + (0, \alpha_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, \alpha_n)$$

y por consiguiente se concluye que:

$$F^n = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$$

Ejemplo 2.44.2 *Tenemos que* $(F[x], F, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial y si además tenemos a* W *definido tal y como se realizó en el ejemplo 2.40.1. Si decimos que:*

$$\begin{aligned} U &= \{\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{2m+1}x^{2m+1} + \cdots : \; (\beta_j \in F, \; 0 \leq 2j+1 < \infty), \; \textit{tal que} \\ & \qquad \exists m \in \mathbb{N}, \; k > m \Longrightarrow \beta_{2k+1} = 0\} \end{aligned}$$

por lo tanto $U \leq F[x]$ *y además* $U \cap W = \emptyset$*. Entonces:*

$$F[x] = U \oplus W.$$

Ejemplo 2.44.3 *Sabemos que* $(F^F, F, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial (por ejemplo 2.1.3), asumimos en este ejemplo que* $F = \mathbb{R}$ *y definimos los siguientes conjuntos de funciones:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{\mathbb{R}}_P &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \; (f(-x) = f(x), \; x \in \mathbb{R})\} \\ \mathbb{R}^{\mathbb{R}}_I &= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \; (f(-x) = -f(x), \; x \in \mathbb{R})\} \end{aligned}$$

llamados subconjuntos de `funciones pares e impares`*, respectivamente. Entonces:*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}_P \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{R}}_I$$

Es importante destacar que las sumas directas internas están relacionadas con la unicidad de las descomposiciones en sumas, es decir, que V es la suma directa interna de subespacios de $W_1, W_2, \ldots, W_n$ de V, si todo elemento $v \in V$ puede escribirse en forma única como:

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

en donde $w_i \in W_i$ (con $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}^+$) y esto lo podemos ilustrar mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.45 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Si* $n \in \mathbb{N}^+$, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ *y* $\{W\}_{i \in I}$ *una familia de subespacios de* V, *tales que:*

$$V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$.

(ii) *Si* $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 0$ *(con* $w_i \in W_i$, $1 \leq i \leq n$*), entonces* $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0$.

(iii) *Cada elemento* $v \in V$, *se expresa de forma única como suma*

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

en donde $w_i \in W_i$.

Demostración:

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Si tenemos que $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 0_V$, con $w_i \in W$ (con $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}^+$), entonces por definición 2.44-ii (definición de suma directa interna), se obtiene:

$$W_1 \cap \left(\sum_{j \neq 1} W_j \right) = \{0_V\}$$

y como:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \cdots + w_n &= 0_V \\ w_1 &= -w_2 - w_3 - \cdots - w_n \end{aligned}$$

así que:

$$w_1 = -w_2 - \cdots - w_n \in W_1 \cap \left(\sum_{j \neq 1} W_j \right) = \{0_V\}$$

y de esto obtenemos que $w_1 = 0_V$ y de manera similar se concluye que:

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0_V$$

$\diamond$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$

Como por hipótesis se tiene que:

$$V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

por consiguiente, por definición 2.42 (definición de suma) se obtiene que cada elemento $v \in V$ se descompone en una suma de la forma:

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_n; \quad con \;\; w_i \in W_i$$

Supongamos que $v \in V$ acepta dos descomposiciones en sumas que son iguales, es decir:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = w_1' + w_2' + \cdots + w_n'$$

entonces:

$$(w_1 - w_1') + (w_2 - w_2') + \cdots + (w_n - w_n') = 0_V$$

y por lo tanto:

$$w_1 = w_1'; \quad w_2 = w_2', \ldots, w_n = w_n'.$$

Entonces se concluye que ambas descomposiciones son las mismas.

$\diamond$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$

Tenemos por hipótesis que:

$$V = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

así que de la definición 2.44 (definición de suma directa interna) nos falta por demostrar que la familia de subespacios de V son independientes (es decir, nos falta por ver ii).

Por lo tanto, si un elemento $w_1 \in W_1$, supongamos que:

$$w_1 \in W_1 \cap \left(\sum_{j \neq 1} W_j \right)$$

entonces se tiene que:

$$w_1 = w_2 + \cdots + w_n; \quad con \;\; w_i \in W_i$$

es decir

$$w_1 + 0_V + \cdots + 0_V = 0_V + w_2 + \cdots + w_n$$

y luego por hipótesis se cumple la unicidad, entonces $w_1 = 0_V$, por lo tanto:

$$W_1 \cap \left(\sum_{j \neq 1} W_j \right) = \{0_V\}$$

es el subespacio trivial.

De manera análoga, se encuentra que:

$$W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = \{0_V\}$$

así que con esto probamos que la familia de subespacios son independientes. Entonces:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$$

$\square$

Es de destacar que si un espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ se expresa como suma directa interna de una familia de subespacios, entonces cada elemento de V esta determinado por un elemento de cada uno de los subespacios.

La demostración del anterior resultado, se realizó para una familia finita de subespacios, pero la demostración para una familia arbitraria de subespacios de V se realiza de forma similar, es decir, para $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de V.

Teorema 2.46 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y*

$$\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

un conjunto finito linealmente independiente. Entonces $\mathfrak{B}$ *es una base de* V *sí y sólo sí:*

$$V = L(v_1) \oplus L(v_2) \oplus \cdots \oplus L(v_n)$$

Demostración:

(⟹) (i) $V \subseteq L(v_1) \oplus L(v_2) \oplus \cdots \oplus L(v_n)$.

Si $v \in V$, entonces v puede escribirse de forma única como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$ (por proposición 2.10)

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i; \qquad \alpha_i \in F, \;\; v_i \in V$$

entonces como:

$$\begin{aligned} L(v_1) &= \{\alpha_1 v_1 : \;\; \alpha_1 \in F\} \\ L(v_2) &= \{\alpha_2 v_2 : \;\; \alpha_2 \in F\} \\ &\vdots \\ L(v_n) &= \{\alpha_n v_n : \;\; \alpha_n \in F\} \end{aligned}$$

así que por definición de suma (definición 2.42)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in L(v_1) + L(v_2) + \cdots + L(v_n)$$

y es de notar que por definición de suma directa interna:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in L(v_1) \oplus L(v_2) \oplus \cdots \oplus L(v_n)$$

(ii) $L(v_1) \oplus L(v_2) \oplus \cdots \oplus L(v_n) \subseteq V$. Esto es una consecuencia inmediata.

$\diamond$

($\Longleftarrow$) Se tiene que demostrar que:

($\star$) $\mathfrak{B}$ genera a V.

Si $v \in V$, entonces podemos escribir a v como:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad en \ donde \ \alpha_i v_i \in L(v_i)$$

y entonces $\mathfrak{B}$ genera a V.

($\star\star$) $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente.

Es inmediata de la hipótesis.

Entonces $\mathfrak{B}$ es una base finita de V.

$\square$

La demostración de un resultado análogo para espacios vectoriales de dimensión infinita será considerada en el siguiente capítulo.

Definición 2.47 (Complemento) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y U, T ambos subespacios de V. Si $V = U \oplus T$, se dice que T es un* `complemento` *de U en V.*

Proposición 2.48 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita y $U \leq V$ (siendo U un subespacio propio). Entonces existe un complemento de U en V.*

Demostración:

Sea $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base finita de U, entonces por el teorema 2.21 podemos extender este conjunto a una base de V, supongamos que

$$\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\} \ es \ una \ base \ de \ V$$

por consiguiente, si tenemos $\mathfrak{B}'' = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\}$ entonces este conjunto es linealmente independiente, puesto que todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es también linealmente independiente y el subespacio generado por $\mathfrak{B}''$ es el complemento de U, es decir:

$$T = L(\{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\})$$

entonces por el teorema 2.46

$$V = L(v_1) \oplus L(v_2) \oplus \cdots \oplus L(v_m) \oplus L(v_{m+1}) \oplus \cdots \oplus L(v_n)$$

así que:

$$T = L(v_{m+1}) \oplus \cdots \oplus L(v_n)$$

por lo tanto:

$$V = U \oplus T$$

$\square$

La pregunta inmediata es: ¿Se cumple para espacios vectoriales de dimensión infinita?, esto será considerado con más detalles en el siguiente capítulo.

Ejemplo 2.48.1 *Si tenemos el espacio vectorial* $(F[x], F, +, \cdot)$ *y* W*,* U *definidos tal y como se realizó en el ejemplo 2.44.2, entonces:*

$$F[x] = U \oplus W$$

por lo tanto, W *es el complemento de* U *en* V*.*

Ejemplo 2.48.2 *Por el ejemplo 2.44.3, tenemos que:*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}_P \oplus \mathbb{R}^{\mathbb{R}}_I$$

entonces podemos afirmar que el subespacio de las funciones impares ($\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_I$*) es el complemento del subespacios de las funciones pares (*$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_P$*) en* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*.*

Es de notar que los complementos de un subespacio no son necesariamente únicos, es decir, un subespacio puede tener diferentes complementos en V. Veamos:

Ejemplo 2.48.3 *Tomemos el espacio vectorial* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *y sean*

$$\begin{aligned} U &= L((1,0)) \\ W &= L((0,1)) \\ T &= L((-1,2)) \end{aligned}$$

entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= L(U) \oplus L(W) \\ \mathbb{R}^2 &= L(U) \oplus L(T) \end{aligned}$$

y es de observar que

$$W = L((0,1)) \neq L((-1,2)) = T, \quad \Longrightarrow \quad W \neq T$$

pero W *y* T *son complementos de* U *en* $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.49 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* U, T *ambos subespacios de* V. *Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F(U+W) + \boldsymbol{dim}_F(U \cap W) = \boldsymbol{dim}_F(U) + \boldsymbol{dim}_F(W)$$

Demostración:

Por proposición 2.5 $U \cap W \leq V$, por lo tanto, por el teorema 2.22 (Existencia de bases finitas) existe una base para $U \cap W$, así que supongamos que:

$$\mathfrak{B}' = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

es una base de $U \cap W$, entonces por definición de base (definición 2.20) y de intersección, $\mathfrak{B}'$ es un subconjunto linealmente independiente de U y W, respectivamente. Así que utilizando el teorema 2.21, podemos extender este subconjunto hasta obtener una base de U y de W, por lo tanto, sean:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}'' &= \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m\} \\ \mathfrak{B}''' &= \{u_1, u_2, \ldots, u_k, w_1, w_2, \ldots, w_n\} \end{aligned}$$

bases finitas de U y de W, respectivamente.

Ahora, es fácil ver que $U + W \leq V$, así que tenemos que demostrar que:

$$\mathfrak{B}'''' = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_m, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

es una base finita de $U + W$. Entonces observemos que:

$\star$ $\mathfrak{B}''''$ es un sistema generador de $U + W$.

Sea $v \in U+W$, por definición de suma (definición 2.42) se tiene que $v = u+w$, en donde $u \in U$ y $w \in W$. Así que como $\mathfrak{B}''$ es una base de U, entonces u puede escribirse de forma única de la siguientes manera:

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j \tag{2.42}$$

y de igual manera, podemos escribir de forma única a w como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}'''$, así que:

$$w = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p u_p + \sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q \tag{2.43}$$

y sustituyendo (2.42) y (2.43) en $v = u + w$, obtenemos que:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j + \sum_{p=1}^{k} \lambda_p u_p + \sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q$$

y realizando las operaciones necesarias, se tiene que:

$$v = \sum_{r=1}^{k} (\alpha_r + \lambda_r) u_r + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j + \sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q$$

así que $\mathfrak{B}''''$ genera a $U + W$.

$\star\star$ $\mathfrak{B}''''$ es linealmente independiente.

Si tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j + \sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q = 0$$

entonces:

$$-\sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j$$

por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j \in U$$

es decir:

$$-\sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q \in U$$

y además:

$$-\sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q \in W$$

entonces:

$$-\sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q \in U \cap W$$

y como $\mathfrak{B}'$ es una base de $U \cap W$, entonces todo elemento de $U \cap W$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}'$, por lo tanto:

$$-\sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$$

así que:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i + \sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q = 0$$

y como $\mathfrak{B}'''$ es una base de W, por independencia lineal se debe tener que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0$$

y así que:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0 \tag{2.44}$$

como:

$$-\sum_{q=1}^{n} \gamma_q w_q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j$$

y de 2.44 se tiene que:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j$$

y como $\mathfrak{B}''$ es una base de U, entonces:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0 \tag{2.45}$$

entonces de 2.44 y de 2.45, tenemos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = 0$$

por consiguiente, $\mathfrak{B}''''$ es linealmente independiente.

y concluimos que $\mathfrak{B}''''$ es una base de $U + W$, entonces:

$$\mathbf{dim}_F(U + W) = k + m + n$$

Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}_F(U) + \mathbf{dim}_F(W) &= (k + m) + (k + n) \\ &= k + (m + k + n) \\ &= \mathbf{dim}_F(U \cap W) + \mathbf{dim}_F(U + W) \end{aligned}$$

□

Este resultado vale tanto para el caso donde la dimensión del espacio vectorial es finita o infinita, debemos plantearlo de forma separada para cada caso.

Teorema 2.50 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita y U, T ambos subespacios de V. Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F(U + W) + \boldsymbol{dim}_F(U \cap W) = \boldsymbol{dim}_F(U) + \boldsymbol{dim}_F(W)$$

La demostración de este resultado será tratada con detalle en el próximo capítulo. Es de notar que si $U \cap W = \{0_V\}$, entonces tenemos que:

$$\mathbf{dim}_F(U \cap W) = \mathbf{dim}_F\{0_V\} = 0$$

así que por el teorema 2.49 obtenemos que:

$$\mathbf{dim}_F(U + W) = \mathbf{dim}_F(U) + \mathbf{dim}_F(W)$$

Además podemos plantear el siguiente resultado de forma inmediata:

Corolario 2.51 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Si U es un complemento de W en V, entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F U + \boldsymbol{dim}_F W = \boldsymbol{dim}_F V$$

Es decir

$$\boldsymbol{dim}_F U + \boldsymbol{dim}_F W = \boldsymbol{dim}_F (U \oplus W)$$

Teorema 2.52 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\{W_i\}_{i=1}^n$ (con $n \in \mathbb{N}^+$) es una familia de subespacios vectoriales de V. Si V es la suma de $\{W_i\}_{i=1}^n$ entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F V \leq \sum_{i=1}^n \boldsymbol{dim}_F W_i$$

y además:

$$\boldsymbol{dim}_F V = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{dim}_F W_i \quad \Longleftrightarrow \quad V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$$

<u>Demostración:</u>

Procederemos a demostrar primero que:

$$\mathbf{dim}_F V = \sum_{i=1}^n \mathbf{dim}_F W_i \quad \Longleftrightarrow \quad V = \bigoplus_{i=1}^n W_i$$

y esto lo hacemos de la siguiente manera:

($\Longrightarrow$)

$$\mathbf{dim}_F V = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{dim}_F W_i \quad \Longrightarrow \quad V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$$

Sea $\mathfrak{B}_i = \{v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{m_i}^i\}$ (con $m_i = \mathbf{dim}_F W_i$, $1 \leq i \leq n$) una base de W_i.

Si

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i'$$

en donde $w_i, w_i' \in W_i$, $1 \leq i \leq n$, y como $\mathfrak{B}_i$ es una base finita de W_i, entonces:

$$w_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ji} v_j^i \qquad y \qquad w_i' = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ji} v_j^i$$

Así que como:

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = w_1' + w_2' + \cdots + w_n'$$

por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{m_1} \alpha_{j1} v_j^1 + \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{j2} v_j^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{jn} v_j^n = \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{j1} v_j^1 + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{j2} v_j^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m_n} \beta_{jn} v_j^n$$

y aplicando elemento inverso, elemento neutro, conmutatividad y distributividad de la definición 2.1, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{m_1} (\alpha_{j1} - \beta_{j1}) v_j^1 + \sum_{j=1}^{m_2} (\alpha_{j2} - \beta_{j2}) v_j^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{m_n} (\alpha_{jn} - \beta_{jn}) v_j^n = 0$$

y se puede ver que $\{v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{m_1}^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{m_2}^2, \ldots, v_1^n, v_2^n, \ldots, v_{m_n}^n\}$ es una base de V, así que por independencia lineal y elemento opuesto:

$$\alpha_{j1} = \beta_{j1}; \qquad \alpha_{j2} = \beta_{j2}; \quad \ldots \quad \alpha_{jn} = \beta_{jn}$$

es decir, $w_i = w_i'$ (para $1 \leq i \leq n$). Entonces cada elemento $v \in V$, se expresa de forma única como suma:

$$v = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

y entonces por el teorema 2.45, obtenemos

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i.$$

$\diamond$

$(\Longleftarrow)$

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{dim}_F V = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{dim}_F W_i$$

Realizamos esta demostración utilizando inducción, por lo tanto

1) (Iniciación de la inducción) Veamos que se cumple para $n = 2$. Por consiguiente, como $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, entonces $\mathbf{dim}_F(W_1 \cap W_2) = 0$ y por el teorema 2.49, obtenemos que:

$$\mathbf{dim}_F(W_1 + W_2) = \mathbf{dim}_F W_1 + \mathbf{dim}_F W_2$$

y como por hipótesis $V = W_1 + W_2$, entonces:

$$\mathbf{dim}_F V = \mathbf{dim}_F W_1 + \mathbf{dim}_F W_2$$

2) (Hipótesis inductiva) Supongamos que se cumple para n, es decir:

$$\mathbf{dim}_F V = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{dim}_F W_i$$

3) Probemos que se cumple para $n + 1$.

Sabemos por hipótesis que:

$$V = \sum_{i=1}^{n+1} W_i = \sum_{i=1}^{n} W_i + W_{n+1}$$

y además que como la familia de subespacios $\{W_i\}_{i=1}^{n}$ son independientes, entonces:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) \cap W_{n+1} = \{0_V\} \tag{2.46}$$

así que por el teorema 2.49, se tiene que:

$$\mathbf{dim}_F\left(\sum_{i=1}^{n} W_i + W_{n+1}\right)+\mathbf{dim}_F\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \cap W_{n+1}\right) = \mathbf{dim}_F\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right)+\mathbf{dim}_F(W_{n+1})$$

y por 2.46, resulta que:

$$\mathbf{dim}_F\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \cap W_{n+1}\right) = 0$$

por lo tanto:

$$\mathbf{dim}_F\left(\sum_{i=1}^{n} W_i + W_{n+1}\right) = \mathbf{dim}_F\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) + \mathbf{dim}_F(W_{n+1})$$

y por la hipótesis inductiva, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}_F V &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{dim}_F W_i + \mathbf{dim}_F W_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{dim}_F W_i \end{aligned}$$

◇

En el caso anterior la suposición realizada era que la familia de subespacios $\{W_i\}_i^n$ eran independientes, ahora si la familia de subespacios no es independiente, entonces es inmediato por el teorema 2.49 que

$$\mathbf{dim}_F V < \sum_{i=1}^{n} \mathbf{dim}_F W_i$$

□

Para cuando V es infinito dimensional tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.53 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita y $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios vectoriales de V. Si V es la suma de $\{W_i\}_{i\in I}$ entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F V \leq \sum_{i\in I} \boldsymbol{dim}_F W_i$$

Es importante acotar que cuando los espacios vectoriales son de dimensión infinita, no se cumple necesariamente que:

$$\mathbf{dim}_F V = \sum_{i\in I} \mathbf{dim}_F W_i \quad \Longleftrightarrow \quad V = \bigoplus_{i\in I} W_i$$

y este caso se tratará con detalle en el próximo capítulo.

2.12. Bases ordenadas

Si tenemos un espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ de dimensión finita, es decir, $\mathbf{dim}_F V = n$, con $n \in \mathbb{N}^+$, entonces por el teorema 2.22 V tiene una base finita $\mathfrak{B}$ con n elementos; la cuestión fundamental a evaluar con respecto a las bases de un espacio vectorial es el orden que poseen los elementos en $\mathfrak{B}$, hasta este momento no hemos tomado en cuenta el orden de los elementos en $\mathfrak{B}$, entonces consideremos la siguiente definición:

Definición 2.54 (Base ordenada) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Una* `base ordenada` *de V es una sucesión finita de vectores linealmente independientes con un orden bien definido y que generan a V.*

Por lo tanto, una base ordenada de V es una sucesión finita $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ para los cuales el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base finita de V.
De manera que si dos bases ordenadas tienen los mismos elementos, pero ordenadas de forma diferentes, se consideraran como bases ordenadas diferentes.
Ahora es importante considerar esta definición de base ordenada para el caso donde el espacio vectorial posee dimensión infinita y esto lo haremos en el próximo capítulo.
Teniendo en cuenta el orden de los elementos en $\mathfrak{B}$ y por la proposición 2.10, cada elemento de $v \in V$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos en $\mathfrak{B}$, entonces también podemos considerar el conjunto de los elementos en F con la cual podemos escribir a v como combinación lineal de los elementos en $\mathfrak{B}$, así que consideremos la siguiente definición:

Definición 2.55 (Coordenadas de v con respecto a la base ordenada $\mathfrak{B}$) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ una base ordenada finita de V. Cada elemento de $v \in V$, puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$, digamos que:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

en donde $\alpha_i \in F$, $v_i \in \mathfrak{B}$ y $1 \leq i \leq n$. Entonces $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ son las `coordenadas de` v `con respecto a la base ordenada` $\mathfrak{B}$.

Es de mayor conveniencia utilizar como notación la matriz de las coordenadas de v con respecto a la base ordenada $\mathfrak{B}$:

$$[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Notemos que el vector de coordenadas $[v]_{\mathfrak{B}}$ depende del orden de los elementos en el conjunto $\mathfrak{B}$, un cambio en el orden en que aparecen los elementos en la base $\mathfrak{B}$, puede modificar las coordenadas de v con respecto a la base $\mathfrak{B}$.

Se puede probar que el vector de coordenada de un elemento $v \in V$ es único, puesto que si:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad y \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

entonces $\alpha_i = \beta_i$ (con $1 \leq i \leq n$). Ya que:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\ v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \end{aligned}$$

entonces:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

así que, por elemento inverso, elemento neutro, conmutatividad y distributividad de la definición 2.1 (definición de espacio vectorial), se tiene que:

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

y como $\mathfrak{B}$ es una base finita, entonces $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente, de donde:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

y esto implica que

$$\alpha_1 = \beta_1; \quad \alpha_2 = \beta_2; \quad \cdots \quad \alpha_n = \beta_n.$$

y con esto probamos que:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

es decir, dado $v \in V$ y $\mathfrak{B}$ una base ordenada de V, entonces las coordenadas de v en esa base son únicas.

Veamos un ejemplo de las coordenadas de un vector $v \in V$ con respecto a una base ordenada $\mathfrak{B}$;

Ejemplo 2.55.1 *Si tenemos el espacio vectorial $(F^n, F, +, \cdot)$ y la base finita:*

$$\mathfrak{B} = \{e_i : \quad (1 \leq i \leq n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+)\}$$

de F^n. Dado que todo elemento $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ se escribe como:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 1)$$

entonces el vector de coordenadas de $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ con respecto a la base ordenada $\mathfrak{B}$ es:

$$[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Ahora, si tenemos un espacio vectorial de dimensión finita $(V, F, +, \cdot)$ ($\mathbf{dim}_F V = n$, $n \in \mathbb{N}^+$) y sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ ambas bases finitas ordenadas de V. Digamos que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \\ \mathfrak{B}' &= \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\} \end{aligned}$$

entonces, si $v \in V$, la pregunta inmediata que debe realizarse es: ¿Qué relación existe entre el vector de coordenadas de v con respecto a la base ordenada $\mathfrak{B}$ y el vector de coordenada de v con respecto a la base ordenada $\mathfrak{B}'$?.

Observemos ahora que como $\mathfrak{B}'$ es una base finita de V, todo elemento de $\mathfrak{B}$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}'$, así que si $1 \leq j \leq n$, entonces:

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v'_i = \alpha_{1j} v'_1 + \alpha_{2j} v'_2 + \cdots + \alpha_{nj} v'_n \tag{2.47}$$

Ahora, de manera que como $v \in V$, puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$ y esto implica que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{2.48}$$

por lo tanto:

$$[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

y sustituyendo 2.47 en 2.48 obtenemos que

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\ &= \alpha_1(\alpha_{11} v'_1 + \alpha_{21} v'_2 + \cdots + \alpha_{n1} v'_n) + \cdots + \alpha_n(\alpha_{1n} v'_1 + \alpha_{2n} v'_2 + \cdots + \alpha_{nn} v'_n) \\ &= \alpha_1\alpha_{11} v'_1 + \alpha_1\alpha_{21} v'_2 + \cdots + \alpha_1\alpha_{n1} v'_n + \cdots + \alpha_n\alpha_{1n} v'_1 + \alpha_n\alpha_{2n} v'_2 + \cdots + \alpha_n\alpha_{nn} v'_n \\ &= (\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_2\alpha_{12} + \cdots + \alpha_n\alpha_{1n}) v'_1 + \cdots + (\alpha_1\alpha_{n1} + \alpha_2\alpha_{n2} + \cdots + \alpha_n\alpha_{nn}) v'_n \end{aligned}$$

y la última expresión es una combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}'$ y por lo tanto, se puede afirmar que

$$[v]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_{11} + \alpha_2\alpha_{12} + \cdots + \alpha_n\alpha_{1n} \\ \alpha_1\alpha_{21} + \alpha_2\alpha_{22} + \cdots + \alpha_n\alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1\alpha_{n1} + \alpha_2\alpha_{n2} + \cdots + \alpha_n\alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

entonces se puede decir que:

$$[v]_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

y si asumimos que:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

entonces tenemos que $[v]_{\mathfrak{B}'} = A \cdot [v]_{\mathfrak{B}}$

En resumen, la matriz A, nos permite pasar de una base ordenada $\mathfrak{B}$ de V a otra base ordenada $\mathfrak{B}'$ de V, según la fórmula siguiente:

$$[v]_{\mathfrak{B}'} = A \cdot [v]_{\mathfrak{B}}$$

Por esta razón, la matriz A se le llama `matriz de transición` (o `matriz cambio de base`) de la base ordenada $\mathfrak{B}$ a la base ordenada $\mathfrak{B}'$.

Los siguientes teoremas vinculan la cardinalidad del espacio con su dimensión.

Teorema 2.56 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces:*

$$|V| = |F^{\boldsymbol{dim}_F V}|$$

Demostración:

Supongamos que $\mathbf{dim}_F V = n$ y $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base finita de V, entonces definamos la función f como sigue:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & V & \longrightarrow & F^n \\ & : & v & \longmapsto & [v]_{\mathfrak{B}} \end{array}$$

como $v \in V$, puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$, así que podemos decir que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

por lo tanto:

$$[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

por consiguiente:

$$f(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

así que podemos probar que f es biyectiva y así podemos garantizar que V y F^n tiene la misma cardinalidad. Veamos:

($\star$) f es inyectiva.

Sean $v, w \in V$, entonces:

$$\begin{array}{rcl} v & = & \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\ w & = & \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \end{array}$$

por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} f(v) & = & f(w) \\ f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) & = & f(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n) \\ [v]_{\mathfrak{B}} & = & [w]_{\mathfrak{B}} \\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) & = & (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \end{array}$$

y por igualdad de componentes, obtenemos que

$$\alpha_i = \beta_i; \qquad (con\ \ 1 \leq i \leq n)$$

así que es de notar que $v = w$. Entonces f es inyectiva.

($\star\star$) f es sobreyectiva.

Sabemos que a cada sucesión finita de vectores en F^n, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ le corresponde un único elemento $v \in V$.

Por lo tanto, f es sobreyectiva.

Así que f es una función biyectiva de V en F^n y como dos conjuntos poseen la misma cardinalidad si existe una función biyectiva de un conjunto en el otro, entonces

$$\begin{aligned} |V| &= |F^n| \\ &= |F^{\mathbf{dim}_F V}| \end{aligned}$$

□

Para el caso donde el espacio vectorial posee dimensión infinita, podemos replantearlo de la siguiente manera; y la demostración será tratada con detalle en el siguiente capítulo.

Teorema 2.57 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita, digamos que $\boldsymbol{dim}_F V = \kappa$, en donde κ es un cardinal infinito y sea μ el cardinal asociado al cuerpo F. Entonces el cardinal de V es $\kappa \cdot \mu$. Así tenemos que*

$$|V| = max\{|F|, \boldsymbol{dim}_F V\}$$

La demostración de este resultado se dará en el próximo capítulo.

Teorema 2.58 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial dimensión finita. Si $(U \leq V \ \wedge\ W \leq V)$. Entonces*

$$\boldsymbol{codim}_F(U + W) + \boldsymbol{codim}_F(U \cap W) = \boldsymbol{codim}_F(U) + \boldsymbol{codim}_F(W)$$

Este resultado también es válido para espacios vectoriales donde la dimensión es infinita. Por lo tanto su demostración debe ser considerada en el próximo capítulo, donde se tratarán los espacios vectoriales de dimensión infinita con más detalles.

Corolario 2.59 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* $U \leq V$, $W \leq V$. *Si* $U \subseteq W$, *entonces*

$$\boldsymbol{codim}_F U \leq \boldsymbol{codim}_F W \leq \boldsymbol{dim}_F V$$

Debemos considerar un resultado inmediato que se nos presenta.

Corolario 2.60 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* U, W *ambos subespacios de* V. *Si* U *es un subconjunto de* W *y además* $\boldsymbol{codim}_F W$ *es finita, entonces*

$$\boldsymbol{codim}_F U = \boldsymbol{codim}_F W \quad \Longrightarrow \quad U = W$$

2.13. Transformación lineal

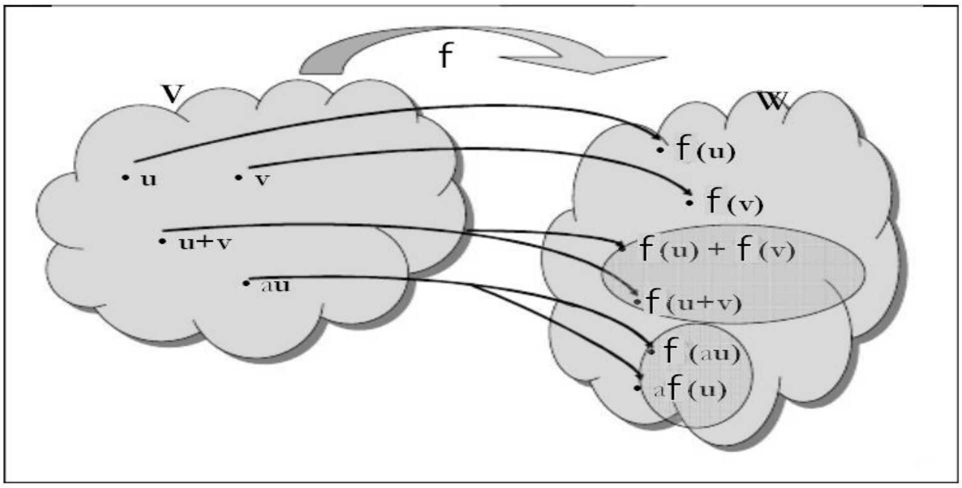
En esta sección vamos a echar un vistazo a un tipo especial de función cuyo dominio y rango sean espacios vectoriales.

Definición 2.61 (Transformación lineal (o homomorfismo)) *Sean* $(V, F, +, \cdot)$ *y* $(W, F, \oplus, \odot)$ *ambos espacios vectoriales. Una función* $f : V \longrightarrow W$ *es un* `transformación lineal` *si:*
(i) $f(v + w) = f(v) \oplus f(w)$.
(ii) $f(\alpha \cdot v) = \alpha \odot f(v)$.
para cualesquiera $v, w \in V$ *y* $\alpha \in F$.

En la definición anterior, se supone que el conjunto de entrada o conjunto inicial de la función f es V, es decir, $Domf = V$. Y además el conjunto de llegada o rango de f esta contenido en W, es decir, $Rgof \subseteq W$.

Es usual denotar con los mismo signos $+$, $\oplus$ y $\cdot$, $\odot$, la suma y la multiplicación escalar, respectivamente, aunque es de destacar que estas operaciones pueden ser diferentes.

Podemos representar gráficamente la definición de transformación lineal de la siguiente manera:



El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W es denotado por $\mathbf{Hom}_F(V, W)$.

Es de observar que $\mathbf{Hom}_F(V, W)$ es un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación escalar definidas como en el ejemplo 2.6 y 2.7, es decir, $(\mathbf{Hom}_F(V, W), F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Una transformación lineal puede o no ser inyectiva, este tipo de transformaciones tienen un comportamiento especial y serán estudiadas más adelante.

Ejemplo 2.61.1 (Multiplicación de vectores por una matriz) *Sea $A \in \mathcal{M}^{m\times n}(F)$, y sean $(F^n, F, +, \cdot)$, $(F^m, F, +, \cdot)$ ambos espacios vectoriales, entonces la función $f : F^n \longrightarrow F^m$ definida como:*

$$f(x) = Ax$$

define una transformación lineal de F^n *en* F^m*. Puesto que si* $x, y \in F^n$*,* $\alpha \in F$*, se tiene que:*

$$\begin{aligned} f(\alpha x + y) &= A(\alpha x + y) \\ &= A(\alpha x) + Ay \\ &= \alpha Ax + Ay \\ &= \alpha f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Por ejemplo, si consideramos los espacios vectoriales $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$, además:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida como:

$$f((x, y)) = (y, -2x + 2y, x)$$

es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.61.2 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* $\mathfrak{B}$ *una base finita de* V *(digamos que* $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$*,* $n = \boldsymbol{dim}_F V$*), si la función* $f : V \longrightarrow F^n$ *definida como la función que asocia a cada elemento* $v \in V$*, con las coordenadas del vector* v *con respecto a la base ordenada* $\mathfrak{B}$*, es decir, si*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

con $\alpha_i \in F$*,* $v_i \in \mathfrak{B}$*,* $1 \leq i \leq n$*, se tiene que*

$$f(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

entonces f *es una transformación lineal de* V *en* F^n*.*

Ejemplo 2.61.3 *Sabemos que* $(\mathcal{C}[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial (por ejemplo 2.1.4) y* $\mathcal{D}[a,b]$ *el conjunto de todas las funciones diferenciables en el intervalo* $[a,b]$. *Por consiguiente, la función* $f : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida como*

$$\tau(f) = \int_0^x f(t)\,dt$$

en donde, $f(t) \in \mathcal{C}[a,b]$, $t \in [a,b]$, $x \in [a,b]$ *es una transformación lineal de* $\mathcal{C}[a,b]$ *en* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.61.4 *Sea*

$$V_n(F) = \{p(x) \in F[x] : \ grad(p(x)) < n\}$$

entonces por el ejemplo 2.1.5, tenemos que $(V_n(F), F, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial, por lo tanto, la función* $f : V_n(F) \longrightarrow V_n(F)$, *definida como:*

$$f(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_{n-1}x^{n-1}) = \alpha_0+\alpha_1(x+1)+\alpha_2(x+1)^2+\cdots+\alpha_{n-1}(x+1)^{n-1}$$

es una transformación lineal de $V_n(F)$ *en* $V_n(F)$.

Ejemplo 2.61.5 *Si tenemos a el espacio vectorial* $(V_n, F, +, \cdot)$, *definido como en el ejemplo 2.61.4 y además tenemos la función* $D : V_n(F) \longrightarrow V_{n-1}(F)$, *definida como:*

$$D(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2}$$

y si:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$$

entonces:

$$D(p(x)) = \sum_{j=1}^{n-1} j\alpha_j x^{j-1}$$

Así que D *es una transformación lineal de* $V_n(F)$ *en* $V_{n-1}(F)$.

Ejemplo 2.61.6 (Multiplicación de polinomios por x) *Sea F un cuerpo y $p(x) \in V_n$. Entonces la función $f : V_n(F) \longrightarrow V_{n+1}(F)$, definida como:*

$$f(p(x)) = x \cdot p(x)$$

es una transformación lineal de $V_n(F)$ en $V_{n+1}(F)$, puesto que si $p(x), q(x) \in V_n(F)$, $\alpha \in F$, entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha p(x) + q(x)) &= x \cdot (\alpha p(x) + q(x)) \\ &= x \cdot (\alpha p(x)) + x \cdot q(x) \\ &= \alpha(x \cdot p(x)) + x \cdot q(x) \\ &= \alpha f(p(x)) + f(q(x)) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.61.7 (Multiplicación de funciones continuas por una función fija) *Sea $g \in \mathcal{C}[a, b]$ una función fija y la función $F : \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}[a, b]$, definida como:*

$$F(f(x)) = f(x) \cdot g(x)$$

en donde $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Entonces F es una transformación lineal de $\mathcal{C}[a, b]$ en $\mathcal{C}[a, b]$.

Definición 2.62 (Operador lineal) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Un* `operador lineal` *en V es un homomorfismo de V en V.*

El conjunto de todos los operadores lineales de V en V es denotado por $\mathbf{End}_F(V)$.

Ejemplos 2.62.1

1. *La transformación lineal f en el ejemplo 2.61.1 es un operador lineal si y sólo si $n = m$.*

2. *Del ejemplo 2.61.4 obtenemos que f es un operador lineal en V_n.*

Ejemplo 2.62.2 *Sea F la transformación lineal definida como en el ejemplo 2.61.7, entonces tenemos que F es un operador lineal en $\mathcal{C}[a, b]$.*

Definición 2.63 (Invariantes) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $f \in \boldsymbol{End}_F(V)$. Un subespacio vectorial U de V se llama* `invariante` *por f o f-invariante si $f(U) \subseteq U$, es decir, $f(u) \in U$, para todo $u \in U$.*

Ejemplo 2.63.1 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $f \in \boldsymbol{End}_F(V)$. Entonces los subespacios triviales $\{0_V\}$ y V son invariantes por f. Puesto que:*

$$\begin{aligned} f(0_V) &= f(0_V + 0_V) && \star \text{ Por proposición 2.2-3} \\ &= f(0_V) + f(0_V) && \star \text{ Puesto que } f \text{ es una transformación lineal.} \end{aligned}$$

y por la proposición 2.2-3 implica que:

$$f(0_V) = 0_V$$

es decir, $f(0_V) \in \{0_V\}$.

Ejemplo 2.63.2 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $f \in \boldsymbol{End}_F(V)$. Por lo tanto, si $\{W_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios invariantes por f, entonces:*

$$\sum_{i \in I} W_i \qquad y \qquad \bigcap_{i \in I} W_i$$

son invariantes por f.

Ejemplo 2.63.3 *Sea $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $f(v) = Av$, es una transformación lineal, por el ejemplo 2.61.1, en donde*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, por ejemplo 2.62.1-1 $f \in \boldsymbol{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ y sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$, definido como sigue:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = 0\}$$

y además se puede notar que $U \leq \mathbb{R}^3$*. Entonces* U *es invariante por* f*, ya que para todo* $w = (x, y, z) \in U$*, se cumple que* $y = x + z$*, luego:*

$$f(w) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x+z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+2z \\ -2x \\ -2z \end{bmatrix}$$

y el vector $(-2x+2z, -2x, -2z) \in U$*, por consiguiente* U *es invariante por* f*.*

Definición 2.64 (Idempotente) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $f \in \boldsymbol{End}_F(V)$*. Diremos que* f *es* `idempotente` *si* $f^2 = f$*.*

La idempotencia es la propiedad para realizar una acción determinada varias veces y aún así conseguir el mismo resultado que se obtendría si se realizase una sola vez.

Definición 2.65 (Proyección de U a través de W) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* U*,* W *ambos subespacios vectoriales de* V*, tales que* $V = U \oplus W$*. El operador lineal* $f : V \longrightarrow W$ *definido por:*

$$f(u + w) = u$$

en donde $u \in U$*,* $w \in W$ *es llamado* `proyección` *de* U *a través de* W*.*

2.14. Funcional lineal

Definición 2.66 (Funcional lineal) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Un* `funcional lineal` *en* V *es un homomorfismo de* V *en el espacio vectorial* $(F, F, +, \cdot)$*.*

El conjunto de todos los funcionales lineales en V es denotado por:

$$V^* = \mathbf{Hom}_F(V, F)$$

y se llama `espacio dual` de V.

Ejemplo 2.66.1 *Del ejemplo 2.61.3, tenemos que la función* $\tau : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como:*

$$\tau(f) = \int_0^x f(t)\, dt$$

es una transformación lineal y como los valores de la trasformación lineal va al cuerpo del espacio vectorial, entonces τ *es un funcional lineal en* $\mathcal{C}[a,b]$.

Ejemplo 2.66.2 *Si tenemos el espacio vectorial* $(F^n, F, +, \cdot)$ *y la función* $f : F^n \longrightarrow F$, *definida como:*

$$f((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

en donde $\alpha_i \in F$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F^n$, $1 \leq i \leq n$, *es funcional lineal en* F^n.

Ejemplo 2.66.3 *Sea* $g \in \mathcal{C}[a,b]$ *una función fija y la función* $F : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida como*

$$F(f(x)) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

en donde $x \in [a,b]$, $f \in \mathcal{C}[a,b]$. *Entonces* F *es un funcional lineal en* $\mathcal{C}[a,b]$.

Podemos observar que un funcional lineal esta determinado por sus valores en una base del espacio vectorial. Más precisamente, sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita y

$$\mathfrak{B} = \{v_i : \ (1 \leq i \leq n \ \wedge \ \mathbf{dim}_F(V) = n \ \wedge \ n \in \mathbb{N}^+)\}$$

es una base finita de V y sea $f \in V^*$.

Entonces si $v \in V$, podemos escribir a v como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$, así que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

en donde $\alpha_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= f(\alpha_1 v_1) + f(\alpha_2 v_2) + \cdots + f(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \end{aligned}$$

y como los $\alpha_i \in F$ dependen de v, esta claro que el conocimiento de los $f(v_i)$ determinan a f.
Antes de considerar un resultado de vital importancia de los funcionales lineales, consideremos la siguiente definición:

Definición 2.67 (Función delta de Kronecker) *Sea I un conjunto de índices. Así la* `función delta de Kronecker` *se define como:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j; \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

en donde $i \in I, \quad j \in I$.

Ya con este conjunto de conceptos dados, podemos dar un resultado que es de gran importancia en los espacios vectoriales, y en este aspecto difieren los espacios vectoriales de dimensión finita con los que poseen dimensión infinita.
Veamos que:

Teorema 2.68 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F V^* = \boldsymbol{dim}_F V$$

<u>Demostración</u>:
Como por hipótesis $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces supongamos que $\mathbf{dim}_F V = n$, con $n \in \mathbb{N}^+$, así que por el teorema 2.22 existe una base finita $\mathfrak{B}$ de V, digamos que:

$$\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

entonces definimos el conjunto $\mathfrak{B}^*$ de la siguiente forma:

$$\mathfrak{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$$

el conjunto de los funcionales lineales, tales que:

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, en donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker (definición 2.67). Entonces debemos probar que $\mathfrak{B}^*$ es una base finita de V^* y así de esta manera llegamos a la conclusión de que:

$$\mathbf{dim}_F V^* = \mathbf{dim}_F V$$

Veamos que:

($\star$) $\mathfrak{B}^*$ es linealmente independiente.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, tales que

$$\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + \cdots + \alpha_n v_n^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^* = 0$$

y puesto que $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, implica que

$$\alpha_1[v_1^*(v_j)] + \alpha_2[v_2^*(v_j)] + \cdots + \alpha_n[v_n^*(v_j)] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i[v_i^*(v_j)] = 0$$

en donde $1 \leq j \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^*(v_j) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

y por la definición de la función delta de Kronecker (definición 2.67), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_i = 0$$

con $1 \leq i \leq n$. Entonces $\mathfrak{B}^*$ es linealmente independiente.

($\star\star$) $\mathfrak{B}^*$ es un sistema generador de V^*.

Sea $f \in V^*$, entonces debemos probar que f puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}^*$. Así que

$$\begin{aligned} f(v_i) &= f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\delta_{ij}; \qquad\qquad 1 \leq j \leq n \\ &= f(v_1)\delta_{1j} + f(v_2)\delta_{2j} + \cdots + f(v_n)\delta_{nj} \\ &= f(v_1)v_1^*(v_j) + f(v_2)v_2^*(v_j) + \cdots + f(v_n)v_n^*(v_j) \end{aligned}$$

es decir:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)v_i^*(v_j)$$

en donde $1 \leq j \leq n$.

Entonces $\mathfrak{B}^*$ es una base finita de V^* y tiene el mismo número de elementos que la base $\mathfrak{B}$ de V, por lo tanto:

$$\mathbf{dim}_F V^* = \mathbf{dim}_F V$$

$\square$

Existe una gran diferencia cuando el espacio vectorial posee dimensión infinita y entonces podemos volver a formular este resultado para espacios vectoriales de dimensión infinita de la siguiente manera:

Teorema 2.69 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita. Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F V^* \geq \boldsymbol{dim}_F V$$

La demostración de este resultado, al igual que los ejemplos, serán presentados en el siguiente capítulo.

Definición 2.70 (Base dual) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión finita, con base* $\mathfrak{B} = \{v_i : i \in I\}$*. Para cada* $i \in I$*, podemos definir el funcional lineal* $v_i^* \in V^*$ *por la condición de ortogonalidad*

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

en donde, δ_{ij} *es la función delta de Kronecker. Entonces el conjunto* $\mathfrak{B}^* = \{v_i^* : i \in I\}$ *es una base para* V^* *y se le conoce como* `base dual` *de* $\mathfrak{B}$*.*

Es importante preguntarse: ¿qué pasaría si se cambia la dimensión del espacio vectorial, es decir, la dimensión del espacio vectorial es infinita? Entonces podemos probar lo siguiente;

Teorema 2.71 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión infinita con base* $\mathfrak{B} = \{v_i : i \in I\}$*. Entonces el conjunto* $\mathfrak{B}^* = \{v_i^* : i \in I\}$ *es linealmente independiente.*

Definición 2.72 *Sean* $(V, F, +, \cdot)$ *y* $(W, F, \oplus, \odot)$ *ambos espacios vectoriales y* $f \in \boldsymbol{Hom}_F(V, W)$*,* $g \in \boldsymbol{End}_F(V)$*. Entonces*

- f *es un* `homomorfismo` *si* f *es una transformación lineal.*
- g *es un* `endomorfismo` *si* g *es un operador lineal.*
- f *es un* `monomorfismo` *si* f *es una transformación lineal inyectiva.*
- f *es un* `epimorfismo` *si* f *es una transformación lineal sobreyectiva.*
- f *es un* `isomorfismo` *si* f *es una transformación lineal biyectiva.*
- g *es un* `automorfismo` *si* g *es un operador lineal biyectivo.*

El conjunto de todos los automorfismo en V se denota como $\mathbf{Aut}_F(V)$.

Denotaremos como $\cong$ isomorfismo entre espacios vectoriales, así que si V, W son espacios vectoriales isomorfos, entonces se escribirá como:

$$V \cong W$$

Si dos espacios vectoriales son isomorfos no significa que sean iguales, pero toda propiedad relacionada con la estructura de espacio vectorial que posea uno de ellos se transfiere al otro a través del isomorfismo.

Ejemplos 2.72.1

1. *Del ejemplo 2.61.4 tenemos que la transformación lineal f de $V_n(F)$ sobre si misma es biyectiva, entonces f es un isomorfismo.*

2. *Sean $(F^n, F, +, \cdot)$ y $(F^m, F, +, \cdot)$ ambos espacios vectoriales. Entonces $F^n \cong F^m$ si y sólo si $n = m$. Para una demostración de este resultado consultar [7].*

3. *Si tenemos los espacios vectoriales $(V_n(F), F, +, \cdot)$ y $(F^n, F, +, \cdot)$, entonces $V_n(F) \cong F^n$, en donde la transformación lineal biyectiva $f : V_n(F) \longrightarrow F^n$ se define como:*

$$f(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$$

Ejemplo 2.72.2 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base finita ordenada de V. Si $v \in V$, las coordenadas de v con respecto a la base ordenada $\mathfrak{B}$ constituyen una n-tupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, como esta es única para cada $v \in V$, la función $f : V \longrightarrow F^n$, definida como*

$$f(v) \quad = \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{2.49}$$

en donde

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

entonces f es una transformación lineal de V en F^n y esta función es un isomorfismo de V en F^n.

Veamos que es un isomorfismo.

- f es una transformación lineal.

  Sean $v, w \in V$, entonces v, w se pueden escribir como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$, así que

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \\ w &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \end{aligned}$$

  por lo tanto, por definición 2.1 (definición de espacio vectorial)

$$v + w = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$$

  entonces

$$\begin{aligned} f(v+w) &= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n) && \star \text{ Por ecuación 2.49.} \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) && \star \text{ Por ecuación 2.1.} \\ &= f(v) + f(w) && \star \text{ Por ecuación 2.49.} \end{aligned}$$

  y además, si $\alpha \in F$, tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha v &= \alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= (\alpha\alpha_1)v_1 + (\alpha\alpha_2)v_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n)v_n \end{aligned}$$

  entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \ldots, \alpha\alpha_n) && \star \text{ Por ecuación 2.49.} \\ &= \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) && \star \text{ Por ecuación 2.2.} \\ &= \alpha f(v) && \star \text{ Por ecuación 2.49.} \end{aligned}$$

  Así que con esto tenemos que f es una transformación lineal.

- f es inyectiva.

  Sean $v, w \in V$, escritos en combinación lineal como se expresó anteriormente, así que tenemos;

$$\begin{aligned} f(v) &= f(w) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \end{aligned}$$

  y por igualdad de componentes, obtenemos que

$$\alpha_i = \beta_i \qquad (con \ 1 \leq i \leq n)$$

  y por consiguiente

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \\ v &= w \end{aligned}$$

  así que f es inyectiva.

- f es sobreyectiva.

  Si tomamos la n-ésimas ordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, entonces el vector

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

  se aplica en ella mediante f.

Este ejemplo nos demuestra que todo espacio vectorial de dimensión finita es isomorfo a F^n.

Después de este último resultado, el estudio del espacio vectorial de dimensión finita $(V, F, +, \cdot)$, desde el punto de vista de su estructura vectorial se identifica con el estudio de F^n, referido a su base natural. Esta es una de las razones por la que a

$$\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

se le denomina también `base canónica`.

Ahora podemos replantearnos el teorema 2.40 y decimos que:

Teorema 2.73 *Sean V y W ambos espacios vectoriales de dimensión infinita. Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F W = \boldsymbol{dim}_F V \quad \Longleftrightarrow \quad W \cong V$$

2.15. Teoremas de isomorfismo

Definición 2.74 (Kernel (o núcleo)) *Sean V y W ambos espacios vectoriales sobre el cuerpo F y si $f \in \boldsymbol{Hom}(V, W)$. Entonces definimos el* `kernel` *(o núcleo) de f como:*

$$K(f) = \{v \in V : \ \ f(v) = 0_W\}$$

La dimensión del kernel de f, se le conoce como `nulidad` y se denota:

$$Nulidad(f) = \mathbf{dim}_F(K(f))$$

Ejemplo 2.74.1 *Tenemos la transformación lineal f, definida como se realizó en el ejemplo 2.61.1; es decir $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida como:*

$$f((x, y)) = (y, -2x + 2y, x)$$

y aplicando la definición de kernel (definición 2.74) obtenemos que:

$$K(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ f((x, y)) = (0, 0, 0)\}$$

es decir

$$K(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ (y, -2x + 2y, x) = (0, 0, 0)\}$$

entonces se puede ver que $x = 0$, $y = 0$ y por consiguiente $K(f) = \{(0, 0) \in \mathbb{R}^2\}$.

Definición 2.75 (Imagen) *Sean V y W ambos espacios vectoriales sobre el cuerpo F. Si $f \in \boldsymbol{Hom}(V, W)$, entonces la* `imagen` *de f esta definida como:*

$$Img(f) = \{w \in W : \ \ w = f(v), \ \ para \ \ algun \ \ v \in V\}$$

La dimensión del subespacio imagen de f, se le conoce como `rango` y se denota

$$Rango(f) = \mathbf{dim}_F(Img(f))$$

Ejemplo 2.75.1 *Procedamos a encontrar la imagen de f, definida tal y como se realizó en el ejemplo 2.74.1, entonces de la definición anterior tenemos que*

$$\begin{aligned} Img(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y,z) = f((u,v)), \ \ para \ \ algun \ \ (u,v) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y,z) = (v, -2u + 2v, u)\} \end{aligned}$$

Así que $v = x$, $u = z$, por lo tanto $y = -2u + 2v$, entonces $y = -2x + 2z$ esto implica que

$$Img(f) = \{(x, -2x + 2z, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

y como

$$(x, -2x + 2z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, 2, 1)$$

entonces

$$Img(f) = L(\{(1, -2, 0), (0, 2, 1)\}) = \mathbb{R}^2$$

.

Nota:
Se puede probar que $K(f) \leq V$ e $Img(f) \leq W$. Es decir, tanto el kernel de f, como la imagen de f son subespacios de V y W, respectivamente.

Teorema 2.76 (Primer teorema de isomorfismo) *Sean V y W ambos espacios vectoriales y $f \in \boldsymbol{Hom}(V, W)$. Entonces*

$$V/K(f) \cong Img(f)$$

Teorema 2.77 (Segundo teorema de isomorfismo) *Sea V un espacio vectorial y U, W ambos subespacio vectoriales de V. Entonces*

$$(U + W)/W \cong U/(U \cap W)$$

Teorema 2.78 (Tercer teorema de isomorfismo) *Sea V un espacio vectorial y $U \subseteq W \subseteq V$, en donde U, W son ambos subespacio vectoriales de V. Entonces*

$$\frac{V/U}{W/U} \cong V/W$$

Para una demostración explícita de los teoremas de isomorfismo consultar [21].

Proposición 2.79 *Sean V y W ambos espacios vectoriales y si $f \in \boldsymbol{Hom}(V, W)$. Entonces:*

(i) *f es sobreyectiva si y sólo si $Img(f) = W$.*

(ii) *f es inyectiva si y sólo si $K(f) = \{0_V\}$.*

Demostración:

Parte i):

Esta demostración es inmediata de la definición de sobreyectividad y la definición de imagen (definición 2.75).

$\diamond$

Parte ii):

($\Longrightarrow$)

Sabemos que $f(0_V) = 0_V$ y supongamos que $u \in K(f)$, entonces por definición de kernel (definición 2.74) tenemos que $f(u) = 0_V$, por lo tanto, $f(u) = f(0_V)$ y como por hipótesis f es inyectiva y por definición de inyectividad $u = 0_V$, entonces $K(f) = \{0_V\}$.

($\Longleftarrow$)

Sean $u, v \in K(f)$, entonces:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v) \\ f(u) - f(v) &= 0_V \\ f(u - v) &= 0_V \end{aligned}$$

por lo tanto, $u - v \in K(f)$ y como por hipótesis $K(f) = \{0_V\}$, esto implica que $u - v = 0_V$, así que $u = v$. Entonces f es inyectiva.

$\square$

Teorema 2.80 *Sean* $(V, F, +, \cdot)$ *y* $(W, F, \oplus, \odot)$ *espacios vectoriales de dimension finita y* $f \in \boldsymbol{Hom}(V, W)$. *Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F(K(f)) + \boldsymbol{dim}_F(Img(f)) = \boldsymbol{dim}_F V$$

Demostración:

Esta proposición es una consecuencia inmediata del primer teorema de isomorfismo (teorema 2.76) y del Teorema 2.36. Puesto que por hipótesis $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión finita y además $K(f) \leq V$, entonces por el teorema 2.36 nos garantiza que:

$$\mathbf{dim}_F(K(f)) + \mathbf{dim}_F(V/K(f)) \quad = \quad \mathbf{dim}_F V \tag{2.50}$$

y por el primer teorema de isomorfismo (teorema 2.76), se tiene que:

$$V/K(f) \cong Img(f)$$

Así que:

$$\mathbf{dim}_F(V/K(f)) \quad = \quad \mathbf{dim}_F(Img(f)) \tag{2.51}$$

y entonces sustituyendo 2.51 en 2.50, se obtiene que:

$$\mathbf{dim}_F(K(f)) + \mathbf{dim}_F(Img(f)) = \mathbf{dim}_F V$$

$\square$

Este resultado es valido también para espacios vectoriales de dimensión infinita, este caso lo trataremos en el próximo capítulo.

Ahora de la demostración del resultado anterior obtenemos una consecuencia inmediata, que resulta de aplicar el primer teorema de isomorfismo (Teorema 2.76) y el teorema 2.73

$$\mathbf{dim}_F(V/K(f)) = \mathbf{dim}_F(Img(f))$$

es decir:

$$\mathbf{codim}_F(K(f)) = \mathbf{dim}_F(Img(f))$$

Ejemplo 2.80.1 *El teorema anterior nos facilita la resolución del ejemplo 2.75.1 y tras averiguar que:*

$$\boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}(K(f)) = \boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}(0_{\mathbb{R}^2}) = 1$$

y además que:

$$\boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = 3$$

entonces:

$$\boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}(Img(f)) = \boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 - \boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}(K(f)) = 3 - 1 = 2$$

y como la imagen de f es un subespacio finito de $\mathbb{R}^2$, se concluye de manera inmediata que:

$$\boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}(Img(f)) = \mathbb{R}^2$$

puesto que si $W \leq V$, V es de dimensión finita,entonces por el teorema 2.40, se tiene que

$$\boldsymbol{dim}_F W = \boldsymbol{dim}_F V \quad \Longleftrightarrow \quad W = V$$

El siguiente resultado se cumple solo para espacios vectoriales de dimensión finita.

Corolario 2.81 *Sean V y W ambos espacios vectoriales y $f \in \boldsymbol{Hom}(V,W)$, donde ambos espacios son de dimensión finita y $\boldsymbol{dim}_F V = \boldsymbol{dim}_F W$. Entonces los siguientes resultados son equivalentes:*

(i) *f es inyectiva.*

(ii) *f es sobreyectiva.*

(iii) *f es biyectiva.*

(iv) *$\boldsymbol{dim}_F(Img(f)) = n$; siendo $\boldsymbol{dim}_F V = n$, con $n \in \mathbb{N}^+$.*

Demostración:

(i) $\Longrightarrow$ (ii).

Por hipótesis f es inyectiva y por las proposición 2.79-ii, tenemos que $K(f) = \{0_V\}$ así que:

$$\mathbf{dim}_F K(f) = 0$$

y por el teorema 2.80, se tiene:

$$\mathbf{dim}_F(Img(f)) = \mathbf{dim}_F V$$

y como por hipótesis:

$$\mathbf{dim}_F V = \mathbf{dim}_F W \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F(Img(f))$$

y por el teorema 2.40, tenemos que:

$$Img(f) = W$$

entonces por la proposición 2.79-i, obtenemos que f es sobreyectiva.

$\diamond$

(ii) $\Longrightarrow$ (i).

Por hipótesis f es sobreyectiva y por la proposición 2.79-i, tenemos $Img(f) = W$ y como por teorema 2.80

$$\mathbf{dim}_F(K(f)) + \mathbf{dim}_F(Img(f)) = \mathbf{dim}_F V$$

así que como por hipótesis $\mathbf{dim}_F V = \mathbf{dim}_F W$, por lo tanto:

$$\mathbf{dim}_F K(f) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad K(f) = \{0_V\}$$

entonces por la proposición 2.79-ii f es inyectiva.

$\diamond$

(i) $\Longrightarrow$ (iii).

Es inmediata, utilizando (i) $\Longrightarrow$ (ii).

$\diamond$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Es inmediata, utilizando (ii) $\Longrightarrow$ (i).

$\diamond$

y además (iii) $\Longrightarrow$ (i) y (iii) $\Longrightarrow$ (ii) son inmediatas de la definición de biyectividad.

Los otros casos son consecuencias obvias.

$\square$

Definición 2.82 (Doble funcional lineal) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y V^* el espacio dual, así el* `doble funcional lineal` *es el conjunto de todos los funcionales lineales en V^*. Definimos y denotamos el* `doble dual`

$$V^{**} = \boldsymbol{Hom}_F(V^*, F)$$

Definición 2.83 (Función canónica de V en V^{**}) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Si $v \in V$, consideremos la función:*

$$\begin{array}{cccc} \overline{v} & : & V^* & \longrightarrow & F \\ & : & f & \longmapsto & f(v) \end{array}$$

así $\overline{v}(f) = f(v)$ y ahora definimos la función:

$$\begin{array}{cccc} \tau & : & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & : & v & \longmapsto & \overline{v} \end{array}$$

por lo tanto, $\tau(v) = \overline{v}$. Esta función es llamada `función canónica` *de V en V^{**}.*

Se puede probar que $\overline{v} \in V^{**}$.

Ahora tomando en cuanta el corolario 2.81, tenemos el siguiente resultado para espacios vectoriales de dimensión finita:

Teorema 2.84 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces la función canónica de V en V^{**} es un isomorfismo de V en V^{**}.*

Demostración:

$(\star)$ τ es una transformación lineal.

Sean $v, w \in V$ y $\alpha \in F$, entonces debemos ver que τ es una transformación lineal, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tau(\alpha v + w) &= \overline{\alpha v + w}(f) && \star\ \forall f \in V^* \text{ y por definición 2.83.} \\ &= f(\alpha v + w) && \star \text{ Por definición 2.83..} \\ &= \alpha f(v) + f(w) && \star \text{ Por ser } f \text{ un funcional lineal.} \\ &= \alpha \overline{v} + \overline{w} && \star \text{ Por definición 2.83.} \\ &= \alpha \tau(v) + \tau(w) \end{aligned}$$

entonces τ es una transformación lineal.

$(\star\star)$ τ es inyectiva.

Sean $v, w \in V$, así que:

$$\begin{aligned} \tau(v) &= \tau(w) \\ \overline{v}(f) &= \overline{w}(f) && (\forall f \in V^*) \\ f(v) &= f(w) && (\forall f \in V^*) \\ f(v) - f(w) &= 0_F && (\forall f \in V^*) \\ f(v - w) &= 0_F && (\forall f \in V^*) \end{aligned}$$

Tenemos que probar que $v - w = 0_V$, con esto obtenemos que $v = w$ y así tenemos que τ es inyectiva.

Supongamos que $v - w \neq 0$; hagamos $v_1 = v - w$ y completemos $\{v_1\}$ a una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V (con $\mathbf{dim}_F V = n$, $n \in \mathbb{N}^+$). Sea $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ la base dual a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V.

Entonces $f_1(v_j) = \delta_{ij}$; así $f_1(v_1) = 1$ y por lo tanto $f_1(v_1) \neq 0$. Por consiguiente $f(v - w) \neq 0$, y con esto llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $f(v - w) = 0$, si se cumple que $v - w = 0$, así que $v = w$, entonces τ es inyectiva.

($\star\star\star$) τ es sobreyectiva.

Por corolario 2.81, tenemos que si τ es inyectiva (resultado anterior), entonces τ es sobreyectiva.

Entonces τ es un isomorfismo de V en V^{**}, así que

$$\mathbf{dim}_F V^{**} = \mathbf{dim}_F V^* = \mathbf{dim}_F V$$

$\square$

Teorema 2.85 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita. Entonces la función canónica de V en V^{**} es un monomorfismo.*

Corolario 2.86 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F V^{**} = \boldsymbol{dim}_F V^* = \boldsymbol{dim}_F V$$

Ahora pasamos al caso donde la dimensión del espacio vectorial es un cardinal infinito, tenemos que

Teorema 2.87 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita. Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F V^{**} \geq \boldsymbol{dim}_F V^* \geq \boldsymbol{dim}_F V$$

Teorema 2.88 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita, digamos que*

$\boldsymbol{dim}_F V = \kappa$, *en donde* κ *es un cardinal infinito y* μ *el número cardinal asociado a el cuerpo* F. *Entonces*

$$\boldsymbol{dim}_F V^* = \mu^\kappa$$

Capítulo 3

Espacios Vectoriales de Dimensión Infinita

3.1. Introducción

Los espacios vectoriales tienen aplicaciones en diferentes áreas de la matemática, la ciencia y la ingeniería. En el capítulo anterior se trataron en detalle los espacios vectoriales que poseen dimensión finita, pero se presentan una gran variedad de espacios vectoriales que poseen dimensión infinita (es decir, no tienen dimensión finita). Como punto destacado, es importante resaltar la relevancia del estudio de los espacios vectoriales de dimensión infinita en la matemática moderna y es de mencionar que estos resultados impactan en distintas áreas del conocimiento, tales como: Física, Química, Computación, Meteorología, entre otras. En especial, los espacios vectoriales de dimensión infinita se utilizan en estudios matemáticos relacionados con las series de Fourier, los cuales son usados en las rutinas modernas de compresión de imágenes y sonidos. También proporcionan el marco para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, se utilizan en la mecánica cuántica, teoría de las ondas electromagnéticas, entre otras. Desde mediados del siglo XIX se ha venido desarrollando la teoría de los espacios vectoriales de dimensión infinita y existen diferentes personajes matemáticos que han contribuido al desarrollo de esta área del álgebra, entre los cuales se encuentran: Salvatore Pincherle (1853-1936), Stefan Banach (1892-1945), Henri Lebesgue (1875-1941), David Hilbert (1862-1943) y Nathan Jacobson (1910-1999), entre otros. Es importante resaltar la participación de otras teorías matemáticas en el desarrollo de la teoría de los espacios vectoriales de dimensión infinita, como por ejemplo: el análisis funcional, la teoría de conjunto (en especial, aritmética transfinita) y la topología.

En virtud de las consideraciones anteriores sería muy importante preguntarnos: ¿cuál es la relación que existe entre los espacios vectoriales de dimensión finita y los que tienen dimensión infinita? ¿que propiedades poseen en común estos espacios vectoriales? ¿en que difieren los espacios vectoriales de dimensión finita con aquellos que son de dimensión infinita? Por ejemplo, observamos que cada espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ que es finitamente generado, tal que $V \neq \{0_V\}$, entonces existe una base finita para V (teorema 2.22), por lo tanto, ¿los espacios vectoriales $(V, F, +, \cdot)$ que son estrictamente infinitamente generados, tal que $V \neq \{0_V\}$, tienen bases de Hamel infinitas en V? por ejemplo, si tenemos el espacio vectorial de las funciones continuas con valores reales en el intervalo $[a, b]$, es decir, el espacio vectorial $(\mathcal{C}[a, b], \mathbb{R}, +, \cdot)$, entonces ¿cómo garantizar la existencia de su base? En este capítulo tratará de las cuestiones antes citadas.

En este trabajo se demostrará que cualquier par de conjuntos generadores, linealmente independiente de un espacio vectorial infinito dimensional poseen la misma cardinalidad. En tal sentido, esto nos permitirá definir de manera precisa la dimensión de un espacio vectorial infinito dimensional.

Se puede observar que existen algunas diferencias de gran relevancia entre los espacios vectoriales de dimensión finita y los espacios vectoriales infinito dimensionales, como por ejemplo, si tenemos el espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ de dimensión finita y $W \leq V$; se tiene que, si $\mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V$ entonces $W = V$ (teorema 2.40). Pero si tenemos que el espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ es de dimensión infinita y $W \leq V$, con $\mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V$, entonces no necesariamente se cumple que $W = V$, ver ejemplo 2.40.1 para observar y sustentar lo antes comentado.

Otra diferencia importante que podemos resaltar es que si $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $\mathbf{dim}_F V^* = \mathbf{dim}_F V$ (teorema 2.68), pero cuando $(V, F, +, \cdot)$ posee dimensión infinita, entonces $\mathbf{dim}_F V^* > \mathbf{dim}_F V$.

Tenemos que destacar también que existen resultados que se cumplen en común tanto para los espacios vectoriales de dimensión finita como para los espacios vectoriales infinito dimensionales. Se verifica lo siguiente: si $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial con dimensión arbitraria y $W \leq V$, entonces:

$$\mathbf{dim}_F W + \mathbf{dim}_F (V/W) = \mathbf{dim}_F V$$

(teorema 2.36, para cuando el espacio vectorial es de dimensión finita) y si además consideramos otro espacio vectorial $(U, F, \oplus, \odot)$ también de dimensión arbitraria, entonces si $f \in \mathbf{Hom}_F(V, U)$ se cumple que

$$\mathbf{dim}_F (K(f)) + \mathbf{dim}_F (Img(f)) = \mathbf{dim}_F V$$

(teorema 2.80, para cuando el espacio vectorial es de dimensión finita). Estas son algunas de las propiedades similares entre espacios vectoriales de dimensión finita y los infinito dimensionales.

Naturalmente, el estudio de los espacios vectoriales de dimensión infinita requiere de razonamientos y la aplicación de herramientas matemáticas más sofisticadas, como lo son: el lema de Zorn, la teoría de los números ordinales y cardinales, el análisis matemático, entre otras.

3.2. Conceptos fundamentales

En el capítulo 2 (Estudio preliminar sobre espacios vectoriales), en la sección 2.4 (Combinaciones lineales) se trató la definición de combinación lineal de un conjunto finito de elementos (definición 2.7), pero ¿qué significa una combinación lineal de un conjunto infinito de elementos de un espacio vectorial?. La definición 2.1 (definición de espacio vectorial) da un axioma para sumar dos elementos de un espacio vectorial V, pero no para sumar una cantidad infinita de elementos de V. Es decir, por sumas sucesivas, tal que si $v, w, z \in V$, entonces podemos realizar la operación $v + w + z$, esto se hace en el sentido de que se suman un conjunto finito de elementos en V, pero en general, no existe una manera de atribuirle el significado de `suma infinita` de elementos de un espacio vectorial.

Entonces debemos encontrar una manera de expresar una combinación lineal de un conjunto infinito de elementos de un espacio vectorial y esto lo hacemos de la siguiente manera:

Definición 3.1 (Combinación lineal) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $W \subseteq V$, *tal que* W *es un conjunto infinito (es decir,* $|W| = \kappa$, *en donde* κ *es un cardinal infinito). Se dice que* $v \in V$ *es una* `combinación lineal` *de elementos* W *con* `coeficientes escalares` *en* F, *si existen* $U \subset W$, $H \subseteq F$ *(*U *y* H *finitos), digamos que* $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *y* $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, *tales que*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

Al igual que para el caso donde las combinaciones lineales se realizan en un conjunto finito, denotaremos el conjunto de todas las combinaciones lineales de W como $L(W)$.

Las definiciones que se realizaran a continuación ya fueron tratadas en el capítulo anterior, pero es importante volver a enunciarlas.

Definición 3.2 (Infinitamente generado) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $W \subseteq V$, *tal que* W *es un conjunto infinito (es decir,* $|W| = \kappa$, *en donde* κ *es un cardinal infinito). Diremos que* V *es* `infinitamente generado` *por* W *si* $V = L(W)$.

Definición 3.3 (Estrictamente infinitamente generado) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Diremos que* V *es* `estrictamente infinitamente generado` *si* V *es infinitamente generado y no es finitamente generado.*

Ejemplo 3.3.1 *Si tenemos el espacio vectorial* $(F[x], F, +, \cdot)$ *y* $W \subseteq F[x]$, *definido como:*

$$W = \{x^i : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \mathbb{N})\} \subseteq F[x]$$

entonces $F[x]$ *es estrictamente infinitamente generado por* W, *puesto que por ejemplo 2.14.3 se tiene que:*

$$L(W) = F[x]$$

y además $F[x]$ *no es finitamente generado, puesto que si existe* $k \in \mathbb{N}$, *entonces:*

$$U = \{1_F, x, \ldots, x^k\} \subseteq F[x]$$

y además si:

$$j = \left(\sum_{n=1}^{k} grad(x^n)\right) + 1$$

fácilmente se comprueba que $x^j \notin L(U)$.

Ahora es importante replantearse el concepto dado anteriormente, pues en el capítulo 2, sección 2.6, definición 2.16, evaluamos la definición de independencia lineal de conjuntos finitos, ahora la pregunta obvia que se plantea es: ¿qué pasaría si el conjunto que tomamos posee infinitos elementos? entonces se reformula la definición de independencia lineal de la siguiente manera:

Definición 3.4 (Independencia lineal) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $W \subseteq V$, *tal que* W *es un conjunto infinito (es decir,* $|W| = \kappa$, *en donde* κ *es un cardinal infinito). Se dice que* W *es* `linealmente independiente` *si todo subconjunto finito de* W *es linealmente independiente (definición 2.16).*

Ejemplo 3.4.1 *Consideremos el espacio vectorial* $(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}, +, \cdot)$ *y* W *definido como en el ejemplo 3.3.1, entonces* W *es linealmente independiente, puesto que si tomamos un subconjunto finito de* W, *digamos que*

$$U = \{1_F, x, x^2, \ldots, x^n\} \subseteq W; \qquad con \ \ n \in \mathbb{N}$$

y supongamos que existen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$*, tales que:*

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n = 0$$

Entonces el teorema fundamental del álgebra nos garantiza que todo polinomio de grado n, con coeficientes complejos, tiene exactamente n-raíces, no necesariamente distintas, pero en este caso se debe contar las raíces con sus multiplicidades. Es decir, que la igualdad no se cumple para todo $x \in \mathbb{C}$, por lo tanto, para que la igualdad se garantice debe cumplirse que:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Ejemplo 3.4.2 *Sea* F *un cuerpo y* $F^{\mathbb{N}^+}$ *el conjunto de todas las sucesiones infinitas, entonces por el ejemplo 2.1.2 obtenemos que* $(F^{\mathbb{N}^+}, F, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial y sea* $W \subseteq F^{\mathbb{N}^+}$*, definido de la siguiente manera:*

$$W = \{e_i : \ (1 \leq i < \infty \ \ \wedge \ \ i \in \mathbb{N}^+)\}$$

en donde definimos a $e_i \in F^{\mathbb{N}^+}$ *como:*

$$e_i = (0_F, 0_F, \ldots, 0_F, \overbrace{1_F}^{posicion \ \ i}, 0_F, \ldots, 0_F, \ldots) \in F^{\mathbb{N}^+}$$

entonces W *es linealmente independiente, puesto que si tomamos un subconjunto finito de* W*, digamos que:*

$$U = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq W; \qquad con \ \ n \in \mathbb{N}^+$$

y supongamos que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$*, tales que:*

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_{F^n}$$

y tenemos que:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) = (0_F, 0_F, \ldots, 0_F, \ldots)$$

y por igualdad de componentes, se obtiene que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0_F$$

por lo tanto, W es linealmente independiente.

Definición 3.5 (Base de Hamel infinitas) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $\mathfrak{B} \subseteq V$, tal que $\mathfrak{B}$ es un conjunto infinito (es decir, $|\mathfrak{B}| = \kappa$, en donde κ es un cardinal infinito). Se dice que $\mathfrak{B}$ es una* `base de Hamel infinita` *de V si se cumple que:*

(i) *$\mathfrak{B}$ es linealmente independiente.*

(ii) *V es estrictamente infinitamente generado por $\mathfrak{B}$.*

Ejemplo 3.5.1 *Si tenemos el espacio vectorial $(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}, +, \cdot)$ y*

$$\mathfrak{B} = \{x^i : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \mathbb{N})\}$$

por el ejemplo 3.3.1 $\mathbb{C}[x]$ es estrictamente infinitamente generado por $\mathfrak{B}$, además $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente por el ejemplo 3.4.1. Entonces $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel infinita de $\mathbb{C}[x]$.

Ejemplo 3.5.2 *Si tenemos el espacio vectorial $(F^{\mathbb{N}^+}, F, +, \cdot)$, el espacio de las sucesiones infinitas y por el ejemplo 3.4.2 W es linealmente independiente, pero es de notar que W no genera a $F^{\mathbb{N}^+}$, puesto que existen elementos $\{a_n\} \in F^{\mathbb{N}^+}$, tal que $\{a_n\}$ no se puede escribir como combinación lineal (finita) de los elementos de W, por ejemplo $(1_F, 1_F, \ldots, 1_F, \ldots) \in F^{\mathbb{N}^+}$ no existe una forma de escribirlo como una combinación lineal finita de los elementos de W. Entonces W no es una base de Hamel infinita de $F^{\mathbb{N}^+}$, puesto que W no genera a $F^{\mathbb{N}^+}$.*

3.3. Existencia de una base

Si tenemos un espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$, tal que $V \neq \{0_V\}$, el cual es finitamente generado por W y sea $U \subseteq W$ linealmente independiente, entonces existe una base finita para V, tal que:

$$U \subseteq \mathfrak{B} \subseteq W$$

este resultado, en particular, fue demostrado en el capítulo anterior y es un hecho bien conocido (teorema 2.21). Pero podemos preguntarnos: ¿podemos garantizar la existencia de al menos una base de Hamel infinita que cumpla con la condición anterior si el espacio vectorial es estrictamente infinitamente generado?

Al igual que para el caso donde el espacio vectorial es finitamente generado, cuando el espacio vectorial es estrictamente infinitamente generado por W y $U \subseteq W$ linealmente independiente, entonces existe una base de Hamel infinita, tal que:

$$U \subseteq \mathfrak{B} \subseteq W$$

Para demostrar que todo espacio vectorial infinito dimensional posee al menos una base de Hamel infinita se necesita utilizar técnicas de la teoría de conjunto. Nos proponemos aquí dar una demostración de la existencia de bases de Hamel infinitas utilizando el lema de Zorn-Karatowski, que es un resultado equivalente al axioma de elección y al principio de buena ordenación. La demostración de los hechos enunciados al comienzo del párrafo consiste en considerar todas las familias de subconjuntos linealmente independientes de un espacio vectorial; hallar una que sea maximal y demostrar que esta genera a todo el espacio vectorial. La utilidad de la teoría de conjuntos, en particular, el lema de Zorn-Karatowski consiste en asegurar la existencia de la familia linealmente independiente maximal.

Asumimos que el espacio vectorial $V \neq \{0_V\}$, puesto que si $V = \{0_V\}$ entonces por convención se asume que la base $\mathfrak{B}$ es el conjunto vacío, es decir, $\mathfrak{B} = \emptyset$.

Observemos los siguientes dos resultados de vital importancia en los espacios vectoriales estrictamente infinitamente generados.

Teorema 3.6 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial, tal que* $V \neq \{0_V\}$. *Sea* $W \subseteq V$ *y* V *estrictamente infinitamente generado por* W *y sea* $U \subseteq W$ *linealmente independiente. Entonces existe al menos una base de Hamel infinita* $\mathfrak{B}$ *de* V, *tal que:*

$$U \subseteq \mathfrak{B} \subseteq W$$

<u>Demostración:</u>

(i) A continuación demostraremos la existencia de $\mathfrak{B}$ y veremos que $\mathfrak{B} \subseteq W$.

Sea P una colección de subconjuntos linealmente independientes que contienen a U y que están contenidos en W, es decir:

$$P = \{B \subseteq V : \ (U \subseteq B \subseteq W \quad \wedge \quad B \ \textit{es linealmente independiente})\}$$

y dotamos a P de una relación binaria, la relación de inclusión, que la definimos de la siguiente manera:

$$\forall B, B' \in P[B \leq B' \quad si \quad B \subseteq B']$$

entonces $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Tenemos que $P \neq \emptyset$, puesto que por hipótesis $U \subseteq W$ y U es linealmente independiente, por lo tanto, $U \in P$.

Sea

$$\mathcal{C} = \{B_i : \ i \in I\}$$

una cadena de elementos de P y digamos que:

$$L = \bigcup_{i \in I} B_i$$

entonces como $B_i \subseteq W$ ($\forall i \in I$), por definición de P y por definición de unión tenemos que $L \subseteq W$, y es fácil notar que L contiene todos lo elementos de la cadena $\mathcal{C}$. Así que $\forall i \in I$, entonces $B_i \leq L$.

Debemos demostrar que $L \in P$, es decir, L es linealmente independiente.

($\star$) L es linealmente independiente.

Sean $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n} \in L$; por definición de unión existen $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}$; tales que:

$$v_{i_k} \in B_{i_k}; \qquad 1 \leq k \leq n$$

como $\mathcal{C}$ es una cadena existe j $(1 \leq j \leq n)$ tal que $\forall k \leq n$, $B_{i_k} \subseteq B_{i_j}$; por lo tanto, es evidente que $v_{i_k} \in B_{i_j}$; $\forall k \leq n$ y como B_{i_j} es linealmente independiente (puesto que $B_{i_j} \in P$); entonces $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}\}$ es linealmente independiente. Por definición 3.4 L es linealmente independiente. Luego $L \in P$.

Como L contiene todos los elementos de la cadena $\mathcal{C}$, es claro que L es una cota superior de $\mathcal{C}$.

Por lo tanto, tenemos que $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado respecto a la relación de inclusión y $P \neq \emptyset$. También tenemos que toda cadena $\mathcal{C}$ de P tiene una cota superior L en P, entonces aplicando el lema de Zorn-Kuratowski (lema A.14) obtenemos que P tiene un elemento maximal $\mathfrak{B}$, el cual es linealmente independiente.

Ahora debemos demostrar que un conjunto linealmente independiente maximal $\mathfrak{B}$ es una base de V.

De la definición 3.5 (base de Hamel infinita) nos falta por demostrar que V es estrictamente infinitamente generado por $\mathfrak{B}$, pues ya sabemos que $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente.

Supongamos que existe un $v \in V$, tal que v no pertenece al subespacio generado por $\mathfrak{B}$, es decir, $v \in V \backslash L(\mathfrak{B})$. Consideremos $\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \cup \{v\}$. Por resultado 2.18 $\widetilde{\mathfrak{B}}$ es linealmente independiente. Además $\mathfrak{B} \leq \widetilde{\mathfrak{B}}$ y $\mathfrak{B} \neq \widetilde{\mathfrak{B}}$ (es decir: $\mathfrak{B} < \widetilde{\mathfrak{B}}$). Es claro entonces que $\widetilde{\mathfrak{B}} \in P$; lo cual contradice el hecho de que $\mathfrak{B}$ es un elemento maximal de P. Entonces $L(\mathfrak{B}) = V$.

Por lo tanto, $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel infinita de V.

(ii) $U \subseteq \mathfrak{B}$. Es inmediata de la definición de P.

Entonces $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel infinita y

$$U \subseteq \mathfrak{B} \subseteq W$$

□

Corolario 3.7 (Existencia de la base) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial, tal que $V \neq \{0_V\}$ y es estrictamente infinitamente generado. Entonces existe al menos una base de Hamel infinita para V.*

Demostración:

La demostración de este resultado es inmediata del teorema 3.6 y asumiendo que $U = \emptyset$ (que por convención U es linealmente independiente). Entonces por el teorema 3.6 existe una base de Hamel infinita $\mathfrak{B}$, tal que $\mathfrak{B} \subseteq W$. Siendo $W = V$.

□

En particular del teorema 3.6, tenemos las siguientes propiedades que se cumplen de forma inmediata:

- Todo espacio vectorial tiene una base.
- Un conjunto linealmente independiente en V, esta contenido en una base.
- Todo sistema generador de V contiene una base.

3.4. Equicardinalidad de las bases de Hamel infinitas

Primero debemos observar la siguiente cuestion: ¿por qué no puede ocurrir que V posea un conjunto de n-elementos ($n \in \omega$) generadores linealmente independiente

y un conjunto de cardinalidad κ (κ cardinal infinito) de generadores linealmente independiente? Supongamos que existe un conjunto $\mathfrak{B}$ de n-elementos ($n \in \omega$) sistema generador de V y linealmente independiente, por lo tanto, por definición 2.20 es una base finita de V, entonces todo conjunto con más de n-elementos es linealmente dependiente (por lema 2.26), por consiguiente, no puede existir un conjunto de cardinalidad κ (siendo κ un cardinal infinito) linealmente independiente.
Se demostró en la sección anterior que todo espacio vectorial estrictamente infinitamente generado tiene al menos una base de Hamel infinita y además sabemos por el capítulo 2, sección 2.8, que en todo espacio vectorial no trivial, el cual es finitamente generado, cualesquiera bases tienen la misma cantidad de elementos (por teorema 2.27); pero cuando el espacio vectorial posee bases de Hamel infinitas, en la cual cada base de Hamel infinita tiene un cardinal infinito asociado a ella, entonces, podemos preguntarnos: ¿poseen la misma cardinalidad dos bases de Hamel infinitas de un espacio vectorial? En esta sección nos ocuparemos de demostrar que la proposición es cierta, es decir, dos bases de Hamel infinitas cualesquiera de un espacio vectorial poseen la misma cardinalidad.
La demostración de que dos bases de Hamel infinitas cualesquiera tienen la misma cardinalidad no es una generalización obvia del caso finito. La siguiente demostración sigue el esquema planteado por H. Löwig (ver [11]) y este resultado lo enunciamos de la siguiente manera:

Teorema 3.8 (Löwig) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial estrictamente infinitamente generado y $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ bases de Hamel infinitas de V. Supongamos que $\mathfrak{B} = \{v_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\mathfrak{B}' = \{w_\alpha : \alpha < \lambda\}$ (en donde κ, λ son cardinales infinitos), entonces $\kappa = \lambda$.*

<u>Demostración:</u>

Definamos la siguiente relación R en $\mathfrak{B}$: $v_\alpha R v_\beta$ (con $\alpha, \beta < \kappa$) sí y sólo sí existe $I \subset \kappa$ (en donde I es un conjunto finito) y una familia de escalares no nulos

$\{c_i : \ i \in I\}$, $\{b_i : \ i \in I\}$, tales que:

$$v_\alpha = \sum_{i \in I} c_i w_i \qquad \wedge \qquad v_\beta = \sum_{i \in I} b_i w_i$$

Claramente R es una relación de equivalencia en $\mathfrak{B}$. Sea

$$\mathfrak{B}/R = \{[v_\alpha] : \alpha < \kappa\}$$

el conjunto de clases de equivalencia. Notemos que:

$$|\mathfrak{B}/R| \leq \kappa$$

Se define la función $f : \mathfrak{B}/R \longrightarrow [\lambda]^{<\omega}$, de la siguiente forma:

$$f([v_\alpha]) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$$

sí y sólo sí existen escalares no nulos (en F) $\{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$, tales que:

$$v_\alpha = \sum_{i=1}^{s} c_i w_{\lambda_i}$$

Evidentemente f está bien definida, pues no depende del representante de la clase de equivalencia seleccionado. Además cada $\alpha < \lambda$ está en algún subconjunto finito que está en $Rgo(f)$, pues si μ no está en el rango de ningún subconjunto finito de $Rgo(f)$, tenemos que como $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel infinita, existe $I \subset \kappa$ y escalares no nulos en F $\{c_i : \ i \in I\}$, en donde:

$$w_\mu = \sum_{i \in I} c_i v_i.$$

A la vez cada v_i es expresable en términos de un subconjunto finito de $\mathfrak{B}'$ (entre los que no aparece w_μ); esto contradice la independencia lineal de los $\{w_\alpha : \ \alpha < \lambda\}$ (notar que en la expresión anterior w_μ tendría coeficiente (-1)).
Supongamos que:

$$|Rgo(f)| = \mu < \lambda$$

entonces:

$$\lambda = |\{w_\alpha : \ \alpha < \lambda\}| = \left|\bigcup\{B : \ B \in Rgo(f)\}\right| \leq \omega \cdot \mu = \mathbf{max}\{\omega, \mu\} = \mu$$

puesto que $\omega \leq \mu$, contradicción, ya que $\mu < \lambda$.
Así que $|Rgo(f)| = \lambda$ y

$$\lambda = |\mathfrak{B}/R| \leq |\mathfrak{B}| = \kappa$$

Invirtiendo los papeles y definiendo la relación de equivalencia de manera análoga en $\mathfrak{B}'$, obtenemos que $\kappa \leq \lambda$. Así que aplicando el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein (teorema A.22), obtenemos que $\kappa = \lambda$.

□

Es decir, dos bases de Hamel infinitas de un espacio vectorial son equipotentes.
Con el resultado anterior demostrado, ya estamos en propiedad de hablar de dimensión de un espacio vectorial que posee bases de Hamel infinitas. Al igual que en el caso donde el espacio vectorial tiene dimensión finita, entonces nosotros podemos hablar de la dimensión de un espacio vectorial estrictamente infinitamente generado como el número cardinal asociado a una de su base, más formalmente, podemos decir que:

Definición 3.9 (Dimensión de Hamel) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* κ *un cardinal infinito. Diremos que el espacio vectorial* V *sobre el cuerpo* F *es de* `dimensión` κ *si existe una base de Hamel infinita* $\mathfrak{B}$ *de* V *tal que:*

$$|\mathfrak{B}| = \kappa$$

Entonces se dice que el espacio vectorial V *sobre el cuerpo* F *es de* `dimensión infinita` *(o* `infinito dimensional`*).*

Ejemplo 3.9.1 *Si* κ *es un cardinal infinito, existen espacios vectoriales de dimensión* κ*.*

$$V = \{f : \kappa \longrightarrow \{0, 1\} : \ |\{\alpha < \kappa : f(\alpha) \neq 0\}| < \omega\}$$

sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_2$*. Notemos que:*

$$| V |=| [\kappa]^{<\omega} |=| \kappa |$$

Ejemplo 3.9.2 *Sea* $(\mathbb{C}[x], \mathbb{C}, +, \cdot)$ *un espacio vectorial. Entonces por el ejemplo 3.5.1 tenemos que:*

$$\mathfrak{B} = \{x^i : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \mathbb{N})\}$$

es una base de Hamel infinita para el espacio vectorial $\mathbb{C}[x]$*. Además es de observar que* $|\mathfrak{B}| = \aleph_0$*, es decir:*

$$\boldsymbol{dim}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x] = \aleph_0$$

Ejemplo 3.9.3 *Sea* $((\mathbb{N}^+)^{\mathbb{N}^+}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *el espacio vectorial de las sucesiones infinitas de números reales, por lo tanto:*

$$\boldsymbol{dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^+)^{\mathbb{N}^+} = 2^{\aleph_0}$$

Se puede observar que:

$$2 \preceq \aleph_0$$

y además:

$$2^{\aleph_0} \preceq \aleph_0^{\aleph_0} \preceq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \approx 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} \approx 2^{\aleph_0} \tag{3.1}$$

entonces:

$$\aleph_0^{\aleph_0} \preceq 2^{\aleph_0}$$

y de la ecuación 3.1 tenemos que

$$2^{\aleph_0} \preceq \aleph_0^{\aleph_0}$$

por lo tanto, por el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder (teorema A.22) obtenemos que:

$$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Ejemplo 3.9.4 (Matrices infinitas) *Sea F un cuerpo y κ, μ cardinales infinitos. Se define una* `matriz real infinita` *de κ-filas y μ-columnas, como la función:*

$$M: \ \kappa \times \mu \quad \longrightarrow \quad F$$

en donde $m_{\xi\eta}$ es la (ξ, η)- ésima entrada de M; como $M(\xi, \eta) = m_{\xi\eta}$. Entonces $M = [m_{\xi\eta}]_{\kappa\times\mu}$.
El conjunto $\mathcal{M}^{\kappa\times\mu}(F)$ de todas las matrices sobre el cuerpo F, es un espacio vectorial con respecto a la suma de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz, definida del modo siguiente:

$$\begin{aligned} [m_{\xi\eta}] + [n_{\xi\eta}] &= [m+n]_{\xi\eta} \\ \alpha \cdot [m_{\xi\eta}] &= [\alpha m]_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{M}^{\kappa\times\mu}(F)$ es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Ejemplo 3.9.5 *Sea $(\mathcal{C}[a,b], \mathbb{C}, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Puesto que $\mathcal{C}[a,b]$ no puede ser generado por un conjunto finito, entonces por el corolario 3.7 debe existir un conjunto $\mathfrak{B}$ de cardinalidad κ (κ cardinal infinito) el cual genera a $\mathcal{C}[a,b]$ y sea linealmente independiente, es decir:*

$$|\mathfrak{B}| = \kappa$$

entonces:

$$\boldsymbol{dim}_{\mathbb{C}}\mathcal{C}[a,b] = \kappa$$

en donde κ es un cardinal infinito.

3.5. Teoremas de la dimensión

La mayoría de los teoremas que presentamos en esta sección, se demostraron para el caso donde la dimensión del espacio vectorial es finita en el capítulo anterior. Pero cuando el espacio vectorial infinito dimensional, la demostración de los siguientes teoremas ameritan utilizar herramientas de la teoría de conjunto, en particular, de la aritmética transfinita.

En la sección 2.10, teorema 2.36, se demostró que si $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $W \leq V$, entonces se cumple que:

$$\mathbf{dim}_F W + \mathbf{dim}_F (V/W) = \mathbf{dim}_F V$$

Ahora, es importante preguntarse: ¿qué pasa con este resultado si la dimensión del espacio vectorial es infinita? A continuación se demostrará que este resultado es también valido para espacios vectoriales infinito dimensional:

Teorema 3.10 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión infinita y* $W \leq V$*. Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F W + \boldsymbol{dim}_F (V/W) = \boldsymbol{dim}_F V$$

<u>Demostración:</u>

Notemos que si $W = V$ el resultado es inmediato. Supongamos entonces $W < V$ y sea $\mathfrak{B}' = \{v_i : \ i \in I\}$ una base de W. Por el teorema 3.6 podemos extender el conjunto $\mathfrak{B}'$ hasta obtener una base de Hamel infinita de V. Digamos que:

$$\mathfrak{B} = \{v_j : \ j \in J\} \qquad (\textit{con } \ I \subset J)$$

es la base de Hamel infinita de V que extiende a $\mathfrak{B}'$.

Sea

$$\mathfrak{B}'' = \{[v_j] : \ j \in J \backslash I\}$$

en donde $[v_j]$ es la clase de equivalencia de v_j (Ver definición A.3) y debemos demostrar que $\mathfrak{B}''$ es una base de V/W.

Veamos lo anterior:

$(\star)$ $\mathfrak{B}''$ es un sistema generador de V/W.

Debemos comprobar que todo elemento de V/W se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}''$.

Por lo tanto, para todo $v \in V$, entonces $[v] \in V/W$. Puesto que $\mathfrak{B}$ es una base de Hamel infinita de V (por hipótesis), entonces cada elemento $v \in V$, se expresa como una combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$, es decir:

$$v = \alpha_1 v_{i_1} + \alpha_2 v_{i_2} + \cdots + \alpha_n v_{i_n} + \beta_1 v_{j_1} + \beta_2 v_{j_2} + \cdots \beta_m v_{j_m}$$

donde $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq I$ y $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\} \subseteq J \backslash I$, por consiguiente:

$$\begin{aligned}
[v] &= \left[\sum_{r=1}^{n} \alpha_r v_{i_r} + \sum_{s=1}^{m} \beta_s v_{j_s}\right] \\
&= \left[\sum_{r=1}^{n} \alpha_r v_{i_r}\right] + \left[\sum_{s=1}^{m} \beta_s v_{j_s}\right] \\
&= \sum_{r=1}^{n} [\alpha_r v_{i_r}] + \sum_{s=1}^{m} [\beta_s v_{j_s}] \\
&= \sum_{r=1}^{n} \alpha_r [v_{i_r}] + \sum_{s=1}^{m} \beta_s [v_{j_s}]
\end{aligned}$$

y como $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n} \in \mathfrak{B}' \subseteq W$, entonces $[v_{i_r}] = [0_V]$ (con $1 \leq r \leq n$). Así que:

$$[v] = \sum_{s=1}^{m} \beta_s [v_{j_s}]$$

en donde $[v_{j_s}] \in \mathfrak{B}''$ y con esto demostramos que $\mathfrak{B}''$ es un sistema generador de V/W.

$\diamond$

($\star\star$) $\mathfrak{B}''$ es linealmente independiente.

Por definición de conjuntos linealmente independientes (definición 3.4), debemos ver que cualquier subconjunto finito de $\mathfrak{B}''$ es linealmente independiente. Entonces si tomamos $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m} \in \mathfrak{B} \backslash \mathfrak{B}'$, y es claro que $[v_{j_1}], [v_{j_2}], \ldots, [v_{j_m}] \in \mathfrak{B}''$.

Debemos demostrar que ellos son linealmente independientes en V/W y esto se demuestra de igual forma como se hizo en el teorema 2.36, en la parte $(\star\star)$.

$\diamond$

Entonces $\mathfrak{B}'' = \{[v_j] : \ j \in J\backslash I\}$ es una base de V/W, que según lo visto tiene la misma cardinalidad que $J\backslash I$. Así pues

$$\begin{aligned}
\mathbf{dim}_F V &= |\mathfrak{B}| \\
&= |\mathfrak{B}' \cup (\mathfrak{B}\backslash\mathfrak{B}')| && \star \text{ Puesto que } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \cup (\mathfrak{B}\backslash\mathfrak{B}'). \\
&= |\mathfrak{B}'| + |(\mathfrak{B}\backslash\mathfrak{B}')| && \star \text{ Por definición de suma de cardinales.} \\
&= \mathbf{dim}_F W + \mathbf{dim}_F (V/W)
\end{aligned}$$

$\square$

Nótese además que, como $\mathbf{dim}_F V = \kappa$ (κ es un cardinal infinito), necesariamente:

$$\mathbf{dim}_F W = \kappa \qquad \vee \qquad \mathbf{dim}_F V/W = \kappa.$$

Teorema 3.11 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita. Para cada subespacio vectorial W de V, entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F W \leq \boldsymbol{dim}_F V.$$

Demostración:

$(\star)$ Observemos que si $W = V$, entonces el resultado es inmediato del teorema 3.10 y además debemos de tener que:

$$\mathbf{dim}_F W = \kappa$$

siendo κ el cardinal infinito asociado a la base de Hamel infinita de V.

$(\star\star)$ Supongamos que $W < V$ y sea $\mathfrak{B}' = \{v_i : \ i \in I\}$ una base de W. Por el teorema 3.6 podemos extender el conjunto $\mathfrak{B}'$ hasta obtener una base de Hamel infinita de V. Digamos que:

$$\mathfrak{B} = \{v_j : \ j \in J\} \qquad (\textit{con } I \subset J)$$

es la base de Hamel infinita de V que extiende a $\mathfrak{B}'$. Supongamos que $|J| = \kappa$, en donde κ es un cardinal infinito (es decir, $\mathbf{dim}_F V = \kappa$) y además asumiendo el axioma de elección podemos asignarle un cardinal al conjunto $\mathfrak{B}'$, así que $|\mathfrak{B}'| = |I| = \lambda$, y como $I \subset J$, entonces $|I| \leq |J|$. Así que si $|I| = |J|$ no hay nada que demostrar. Si $|I| < |J|$, y como por suposición tenemos que:

$$\mathbf{dim}_F W = \lambda = |I|$$

y además:

$$\mathbf{dim}_F V = \kappa = |J|$$

por consiguiente:

$$\mathbf{dim}_F W = |I| < |J| = \mathbf{dim}_F V \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{dim}_F W < \mathbf{dim}_F V$$

y con esto se demostró que:

$$\mathbf{dim}_F W \leq \mathbf{dim}_F V.$$

□

Hay que hacer un énfasis importante y destacar que cuando el espacio vectorial es infinito dimensional, a diferencia de los que poseen dimensión finita, no se cumple que:

$$\mathbf{dim}_F W = \mathbf{dim}_F V \qquad \Longrightarrow \qquad W = V$$

y esto lo podemos observar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.11.1 *Consideremos el espacio vectorial* $(F[x], F, +, \cdot)$ *y sea*

$$W \;=\; \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_{2m+1} x^{2m+1} + \cdots : (\alpha_i \in F,\ \ 0 \leq 2i+1 < \infty),$$
$$\textit{tal que } \exists m \in \mathbb{N}, k > m \Longrightarrow \alpha_{2k+1} = 0\}$$

por lo tanto, $W < F[x]$*. Además, sabemos por el ejemplo 3.9.2 que:*

$$\boldsymbol{dim}_F F[x] \;=\; \aleph_0$$

y

$$\mathfrak{B}' = \{x^{2i+1} : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \mathbb{N})\} \cup \{1_F\}$$

es una base de Hamel infinita de W, tal que $|\mathfrak{B}'| = \aleph_0$, es decir:

$$\boldsymbol{dim}_F W \ = \ \aleph_0$$

y como:

$$\boldsymbol{dim}_F F[x] = \aleph_0 = \boldsymbol{dim}_F W$$

pero es fácil notar que $W \neq V$.

De la definición 2.47 tenemos que si U, W son subespacios de V, con $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita, se dice que W es el complemento de U en V, si $V = U \oplus W$. Además demostramos que todo subespacio vectorial propio de V, tiene un complemento en V (proposición 2.48). Pero sería importante preguntarnos: ¿es posible garantizar la existencia de un complemento de un subespacio vectorial propio de V, cuando V posee una dimensión infinita? La repuesta a esta pregunta es afirmativa, es decir, si se puede garantizar la existencia de un complemento para un subespacio vectorial propio de un espacio vectorial de dimensión infinita.
Se plantea este resultado de la siguiente manera:

Teorema 3.12 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita y $U < V$. Entonces existe un complemento de U en V, y lo denotaremos como $V = U \oplus W$.*

<u>Demostración:</u>
Sea $\mathfrak{B}' = \{v_i : \ i \in I\}$ una base de U. Así que por el teorema 3.6 podemos extender el conjunto $\mathfrak{B}'$ hasta obtener una base de Hamel infinita de V. Supongamos que:

$$\mathfrak{B} = \{v_j : \ j \in J\} \qquad (con \ \ I \subset J)$$

es la base de Hamel infinita de V que extiende a $\mathfrak{B}'$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathfrak{B}'' = \{v_j : \ j \in J \backslash I\}$$

entonces es de notar que $\mathfrak{B}''$ es linealmente independiente, puesto que todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es también linealmente independiente y el subespacio generado por $\mathfrak{B}''$ es el complemento de U en V, es decir:

$$W = L(\{v_j : \ j \in J \backslash I\})$$

entonces es fácil ver que:

$$V = U \oplus W$$

□

Teorema 3.13 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión infinita y* U*,* T *ambos subespacios de* V*. Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F(U) + \boldsymbol{dim}_F(W) = \boldsymbol{dim}_F(U + W) + \boldsymbol{dim}_F(U \cap W)$$

<u>Demostración</u>:

Si tenemos que $\mathbf{dim}_F(U) \quad \wedge \quad \mathbf{dim}_F(W)$ son finitas, el resultado es inmediato. Supongamos, por ejemplo, que $\mathbf{dim}_F(U) = \kappa$ (en donde κ es un cardinal infinito). Digamos que $\mathfrak{B}' = \{u_i : \ i \in I\}$ es una base de $U \cap W$. Entonces por el teorema 3.6 podemos extender el conjunto $\mathfrak{B}'$ hasta obtener una base de Hamel infinita de U y una base de W. Supongamos que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}'' &= \{v_j : \ (j \in J \cup I \quad \wedge \quad I \cap J = \emptyset)\} \\ \mathfrak{B}''' &= \{w_k : \ (k \in K \cup I \quad \wedge \quad I \cap K = \emptyset)\} \end{aligned}$$

son las base de U y W, respectivamente, que extiende a $\mathfrak{B}'$.

Debemos demostrar que $\mathfrak{B}'' \cup \mathfrak{B}'''$ es una base de $U + W$.

($\star$) $\mathfrak{B}'' \cup \mathfrak{B}'''$ es un sistema generador de $U + W$.

Sea $v \in U + W$, por definición 2.42 se tiene que $v = u + w$, en donde $u \in U$ y $w \in W$. Entonces existen $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_p} \in \mathfrak{B}''$, $w_{k_1}, w_{k_2}, \ldots, w_{k_q} \in \mathfrak{B}'''$ y

$u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r} \in \mathfrak{B}'$, tales que:

$$u = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{i_s} u_{i_s} + \sum_{m=1}^{p} \beta_{j_m} v_{j_m}$$

y además:

$$w = \sum_{s=1}^{r} \lambda_{i_s} u_{i_s} + \sum_{t=1}^{q} \gamma_{k_t} w_{k_t}$$

así que como $v = u + w$, entonces:

$$v = \sum_{s=1}^{r} (\alpha_{i_s} + \lambda_{i_s}) u_{i_s} + \sum_{m=1}^{p} \beta_{j_m} v_{j_m} + \sum_{t=1}^{q} \gamma_{k_t} w_{k_t}$$

por lo tanto $\mathfrak{B}'' \cup \mathfrak{B}'''$ genera a $U + W$.

($\star\star$) $\mathfrak{B}'' \cup \mathfrak{B}'''$ es linealmente independiente.

Sean $\widetilde{U} \subseteq \mathfrak{B}''$, $\widetilde{W} \subseteq \mathfrak{B}'''$ y $\widetilde{X} \subseteq \mathfrak{B}'$ (finitos). Digamos que:

$$\widetilde{U} = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_p}\}, \quad \widetilde{W} = \{w_{k_1}, w_{k_2}, \ldots, w_{k_q}\} \quad y \quad \widetilde{X} = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}\}$$

tal que:

$$\sum_{s=1}^{r} \alpha_{i_s} u_{i_s} + \sum_{m=1}^{p} \beta_{j_m} v_{j_m} + \sum_{t=1}^{q} \gamma_{k_t} w_{k_t} = 0$$

y utilizando un razonamiento similar al utilizado en la demostración del teorema 2.49- ($\star\star$), llegamos a la conclusión de que

$$\alpha_{i_s} = \beta_{j_m} = \gamma_{k_t} = 0$$

con $1 \leq s \leq r$, $1 \leq m \leq p$, $1 \leq t \leq q$ y por consiguiente $\mathfrak{B}'' \cup \mathfrak{B}'''$ es linealmente independiente, puesto que si todo subconjunto finito de un conjunto infinito es linealmente independiente, entonces este conjunto cumple con la independencia lineal.

$\diamond$

Por lo tanto, ahora tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{dim}_F(U) + \mathbf{dim}_F(W) &= |J \cup I| + |K \cup I| \\
&= |J| + |I| + |K| + |I| \\
&= (|J| + |I| + |K|) + |I| \\
&= (|J| + |I| + |K|) + \mathbf{dim}_F(U \cap W) \\
&= \mathbf{dim}_F(U + W) + \mathbf{dim}_F(U \cap W)
\end{aligned}$$

$\square$

Por hipótesis tenemos que el espacio vectorial $(V, F, +, \cdot)$ es infinito dimensional, entonces por suposición tenemos que algunos de estos subespacios vectoriales de V deben tener dimensión infinita (o ambos). Supongamos que $\mathbf{dim}_F(U) = \kappa$ (κ un cardinal infinito) y $\mathbf{dim}_F(W) = \lambda$, tal que $\kappa > \lambda$, entonces debe cumplirse que:

$$\mathbf{dim}_F(U + W) = \kappa \qquad \vee \qquad \mathbf{dim}_F(U \cap W) = \kappa$$

Es de observar que $U \cap W \leq U + W$ y si $\mathbf{dim}_F(U \cap W) = \kappa$, entonces se cumple:

$$\mathbf{dim}_F(U + W) = \kappa$$

3.6. Reticulados de subespacios

Los reticulados son un tipo especial de orden, en el que cada conjunto finito no vacío tiene supremo e ínfimo. Más formalmente se dice que:

Definición 3.14 (Reticulados o Lattice) *Sea L un conjunto no vacío y $\leq$ una relación binaria en L. Si $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, se dice que $(L, \leq)$ es un* `reticulado` *(o* `lattice`*)si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\forall a \in L \; \forall b \in L [\exists \boldsymbol{sup}\{a, b\}]$.

2. $\forall a \in L\ \forall b \in L[\exists \boldsymbol{inf}\{a,b\}]$.

Los reticulados son un caso especial de los conjuntos parcialmente ordenados, en donde cualquier par de elementos de este conjunto tiene supremo e ínfimo. Denotamos el supremo y el ínfimo de la siguiente manera:

$(\star)$ $\forall a \in L\ \forall b \in L \quad \Longrightarrow \quad a \vee b = \mathbf{sup}\{a,b\}$.

$(\star\star)$ $\forall a \in L\ \forall b \in L \quad \Longrightarrow \quad a \wedge b = \mathbf{inf}\{a,b\}$.

Estas operaciones son conocidas como `union` e `intersección`, respectivamente. Es de observar que si $(L,\leq)$ es un reticulado, entonces la operación $\vee$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $\forall a \in L\ \forall b \in L[a \vee b = b \vee a]$ (Conmutatividad).

(ii) $\forall a \in L\ \forall b \in L \forall c \in L[(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)]$ (Asociatividad).

(iii) $\forall a \in L\ \forall b \in L[a \vee (a \wedge b) = a]$ (Absorción).

(iv) $\forall a \in L[a \vee a = a]$ (Idempotencia).

y además, de igual forma la operación $\wedge$ satisface las siguientes condiciones:

(i) $\forall a \in L\ \forall b \in L[a \wedge b = b \wedge a]$ (Conmutatividad).

(ii) $\forall a \in L\ \forall b \in L \forall c \in L[(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)]$ (Asociatividad).

(iii) $\forall a \in L\ \forall b \in L[a \wedge (a \vee b) = a]$ (Absorción).

(iv) $\forall a \in L[a \wedge a = a]$ (Idempotencia).

Obsérvese algunos ejemplos en particular de reticulados:

Ejemplo 3.14.1 *Sea $(L,\leq)$ un conjunto totalmente ordenado, entonces $(L,\leq)$ es un reticulado.*

Ejemplo 3.14.2 *Sea* $L = \{0, a, b, 1\}$*; con* $\vee$, $\wedge$ *definida de la siguiente manera:*

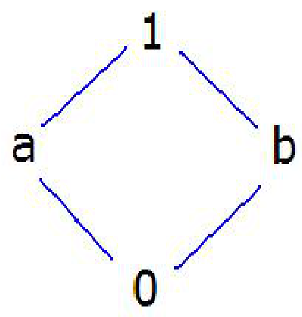
$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Una manera alternativa de describir el orden parcial, es de la siguiente manera: para todo para ordenado (a, b) *(con* $a, b \in L$*) en donde* $a \leq b$*. En el ejemplo anterior se obtiene:*

$$\leq = \{(0,0), (0,a), (0,b), (0,1), (a,a), (a,1), (b,b), (b,1), (1,1)\}$$

este reticulado puede ser expresado por el diagrama de Hasse de la forma siguiente:



Ejemplo 3.14.3 *Sea* L *un conjunto no vacío y la relación de inclusión (la relación binaria en* L*). Entonces* $(\mathcal{P}(L), \subseteq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado (por la*

observación realizada en el ejemplo A.4.1). El supremo de dos subconjuntos de $\mathcal{P}(L)$ es la union de los dos subconjuntos y el ínfimo de dos subconjuntos cualesquiera de $\mathcal{P}(L)$ es la intersección de los dos subconjuntos. Entonces $(\mathcal{P}(L), \subseteq)$ es un reticulado.

Ejemplo 3.14.4 *Sea A un anillo unitario y M un A-módulo y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M. Si la relación de inclusión es la relación binaria en $\{M_i\}_{i\in I}$, entonces se tiene que $(\{M_i\}_{i\in I}, \subseteq)$ es un reticulado. En donde, el supremo de dos submódulos es la suma de submódulos, es decir, si S y T son submódulos de un módulo M, entonces:*

$$\boldsymbol{sup}\{S,T\} = S + T = \{s + t : \ (s \in S \ \wedge \ t \in T)\}$$

y el ínfimo de dos submódulos cualesquiera de M, como la intersección de ellos, es decir:

$$\boldsymbol{inf}\{S,T\} = S \cap T = \{w : \ (w \in S \ \wedge \ w \in T)\}$$

Los reticulados que poseen un interés en particular y que serán cuestión de estudio en esta sección son los reticulados de subespacios de un espacio vectorial.

Ejemplo 3.14.5 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y*

$$L = \{W : \ (W \subseteq V \ \wedge \ W \leq V)\}$$

si la relación de inclusión es la relación binaria en V. Entonces se tiene que $(L, \subseteq)$ es un reticulado.

En donde, si se tienen que U, W son subespacios cualesquiera de V, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{sup}\{U,W\} &= U + W \\ \mathbf{inf}\{U,W\} &= U \cap W \end{aligned}$$

Se puede observar en particular del ejemplo 3.14.3 que $(\mathcal{P}(L), \subseteq)$ es un reticulado, con la union de subconjuntos tomados como supremos de estos. Pero del ejemplo

3.14.5 si tenemos que U, W son subespacios de V, entonces no necesariamente $U \cup W$ es un subespacio de V (por la observación realizada en la proposición 2.5), como sustituto a este conjunto tomamos:

$$U + W = L(U \cup W) = \mathbf{sup}\{U, W\}$$

Consideremos los reticulados de subespacios sobre espacios vectoriales de dimensión finita e infinita y destaquemos la similitudes y diferencias que se presentan en cada uno de los casos.

Es importante destacar que las propiedades de conmutatividad, asociatividad, absorción, idempotencia, respectivamente; se cumplen de forma análoga tanto para el caso donde los reticulados están definidos sobre los subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, como para los infinitos dimensionales.

Además se cumplen algunas propiedades básicas de reticulados, entre los cuales podemos mencionar:

(1) Existe un elemento neutro en L, es decir, un elemento 0 de L, tal que:

$$W \cap 0 = 0 \quad \wedge \quad W + 0 = W$$

para cualquier $W \in L$. Es de observar que $0 = \{0_V\}$. Y además:

$$W \cap V = W \quad \wedge \quad W + V = V$$

(2) Si $W \subseteq U$, entonces:

$$\begin{aligned} U \cap (W + T) &= (U \cap W) + (U \cap T) \\ &= W + (U \cap T) \end{aligned}$$

Un reticulado que cumpla la condición (2), es conocido como `reticulado de Dedekind`.

(3) Para algún $W \in L$, existe un $U \in L$, tal que:

$$W \cap U = 0 \quad \wedge \quad W + U = V$$

es decir:

$$W \oplus U = V$$

Un reticulado que cumpla la condición (3), es conocido como `reticulado complementado`.

Estas propiedades de los reticulados de subespacios de un espacio vectorial, son válidas tanto para el caso donde el espacio vectorial es de dimensión finita, así como también para cuando es de dimensión infinita. Excepción debe realizarse para las condiciones de cadenas, que se estudiarán a continuación.

3.7. Condiciones de cadenas

En esta sección se estudiarán las condiciones de cadenas sobre los reticulados de subespacios. Es importante mencionar ques estas condiciones jugaron un papel muy importante en el desarrollo de la teoría de anillos conmutativos en los trabajos realizados por David Hilbert, Emmy Noether y Emil Artin.

Evaluá algunas definiciones importantes antes de entrar en el tema en cuestión.

Definición 3.15 (Condiciones de cadenas ascendentes) *Sea* $(P, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que se satisfacen las* `condiciones de cadenas ascendentes` *(cca) si dada una sucesión creciente*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$$

de elementos de P*, entonces existe un* $n \in \mathbb{N}^+$*, tal que:*

$$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$$

La sucesión creciente en P *se denomina* `estacionaria`*.*

Definición 3.16 (Condiciones de cadenas descendentes) *Sea* $(P, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que se satisfacen las* `condiciones de cadenas` `descendentes` *(ccd) si dada una sucesión decreciente:*

$$\cdots \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1$$

de elementos de P*, entonces existe un* $n \in \mathbb{N}^+$*, tal que:*

$$x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$$

En particular, se quiere estudiar un tipo especial de condiciones de cadenas, y es sobre los reticulados de subespacios de un espacio vectorial. Se evaluarán las condiciones de cadenas sobre los reticulados de un espacio vectorial de:

(i) dimensión finita.

(ii) dimensión infinita.

Definición 3.17 (Cadenas de subespacios) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios de* V*. Una* `cadena de subespacios` *de un espacio vectorial es una sucesión* $\{W_i\}_{i=1}^n$ *de subespacios de* V *tales que:*

$$\{0_V\} = W_n \subset W_{n-1} \subset \cdots \subset W_2 \subset W_1 = V$$

en donde $n \in \mathbb{N}^+$ *y la inclusión es estricta. La* `longitud` *de la cadena es* n*.*

Definición 3.18 (Condiciones de cadenas ascendentes de subespacios) *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y*

$$L = \{W : \ (W \subseteq V \ \wedge \ W \leq V)\}$$

entonces $(L, \subseteq)$ *es un reticulado (por ejemplo 3.14.5) y sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios de* L*. Se dice que* L *satisface las* `condiciones de cadenas ascendentes de subespacios` *si:*

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \cdots$$

es una cadena ascendente infinita de subespacios, entonces existe un $n \in \mathbb{N}^+$*, tal que:*

$$W_n = W_{n+1} = W_{n+2} = \cdots$$

Definición 3.19 (Condiciones de cadenas descendentes de subespacios) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial y*

$$L = \{W : \ (W \subseteq V \ \ \wedge \ \ W \leq V)\}$$

entonces $(L, \subseteq)$ es un reticulado (por ejemplo 3.14.5) y sea $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de L. Se dice que L satisface las `condiciones de cadenas descendentes de subespacios` *si:*

$$\cdots \leq W_3 \leq W_2 \leq W_1$$

es una cadena descendente infinita de subespacios, entonces existe un $n \in \mathbb{N}^+$, tal que:

$$W_n = W_{n+1} = W_{n+2} = \cdots$$

Un espacio vectorial que cumple con la condición de la definición 3.18 se le denomina `espacio Noetheriano`[1] y cuando cumple la condición de la definición 3.19 se llama `espacio Artiniano`[2].

Es de destacar que si la $\mathbf{dim}_F W_i = n_i$, entonces $n_i \in \mathbb{N}^+$. Además si W, W' son subespacios de un espacio vectorial V sobre el cuerpo F, entonces si $W' \subseteq W$, obtenemos que:

$$\mathbf{dim}_F W \geq \mathbf{dim}_F W'$$

Es posible observar el siguiente resultado:

Teorema 3.20 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El espacio vectorial V es de dimensión finita.*

2. *Se cumplen las condiciones de cadenas ascendentes de subespacios.*

[1] Debido a Emmy Noether.

[2] Debido a Emil Artin.

3. Se cumplen las condiciones de cadenas descendentes de subespacios.

Demostración:

(2) $\implies$ (1).

Supongamos que V es un espacio vectorial infinito, entonces existe una sucesión infinita $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de elementos linealmente independiente de V. Sea U_n el subespacio vectorial generado por $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces la cadena $\{U_n\}_{n\geq 1}$ es infinita y estrictamente ascendiente de subespacios, así que V no satisface las condiciones de cadenas ascendentes de subespacios. Contradicción puesto que por hipótesis V satisface las condiciones de cadenas ascendentes.

$\diamond$

(3) $\implies$ (1).

Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión infinita, se puede elegir una sucesión infinita $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de elementos linealmente independiente de V. Sea V_n el subespacio vectorial generado por $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$. Entonces la cadena $\{V_n\}_{n\geq 1}$ es una familia infinita y estrictamente descendiente de subespacios, así que V no satisface las condiciones de cadenas descendentes de subespacios. Contradicción puesto que por hipótesis V satisface las condiciones de cadenas descendentes.

$\diamond$

(1) $\implies$ (2).

Por hipótesis tenemos que V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $\mathbf{dim}_F V = n$, con $n \in \mathbb{N}^+$. Sea $\{W_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una cadena ascendente de subespacios de V, tal que:

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \cdots \subseteq W_n \subseteq W_{n+1} \subseteq \cdots \tag{3.2}$$

Supongamos que no existe $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall k \geq m: \quad W_k = W_m$$

Sea $n_1 = 1$ y $x_{n_1} \in W_1 \backslash \{0_V\}$. Existe $n_2 \in \mathbb{N}^+$ (con $n_2 > n_1$), tal que $W_{n_2} \backslash W_1 \neq \emptyset$. Sea $x_{n_2} \in W_{n_2} \backslash W_{n_1}$. Es claro que existe un $n_3 \in \mathbb{N}^+$ (con $n_3 > n_2$) tal que

$W_{n_3} \backslash W_{n_2} \neq \emptyset$ y sea $x_{n_3} \in W_{n_3} \backslash W_{n_2}$. Siguiendo con el mismo proceso supongamos que hemos escogido para cada $k \in \mathbb{N}^+$, $x_{n_{k+1}} \in W_{n_{k+1}} \backslash W_{n_k}$ (donde $W_{n_{k+1}} \backslash W_{n_k} \neq \emptyset$). Sea

$$S = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots\}$$

puede probarse que S es un conjunto es linealmente independiente, lo cual contradice $\mathbf{dim}_F V = n$, con $n \in \mathbb{N}^+$.

$\diamond$

(1) $\implies$ (3).

Se realiza de manera similar que el caso anterior, tomando en cuenta algunos detalles en cuestión.

$\square$

Es de notar con la demostración del teorema anterior, que si el espacio vectorial es de dimensión infinita, entonces no se cumplen las condiciones de cadenas ascendentes, ni descendentes.

Ejemplo 3.20.1 *Sea $(F[x], F, +, \cdot)$ el espacio vectorial de las funciones polinomios. Sabemos que $\mathfrak{B} = \{x^i : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \omega)\}$ es una base de Hamel infinita de $F[x]$, entonces por definición de base, $\mathfrak{B}$ debe ser linealmente independiente. Tomamos una sucesión infinita $\{x^i\}_{i \geq 0}$. Entonces la cadena:*

$$L(1_F) \subset L(1_F, x) \subset L(1_F, x, x^2) \subset \cdots$$

es infinita y estrictamente ascendente.
Así que $F[x]$ no satisface la condición de cadena ascendente (definición 3.18).

Teorema 3.21 (Teorema de Noether) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial infinito dimensional y $\mathfrak{B} = \{e_i : \ i < \alpha\}$ una base de Hamel infinita de V. Entonces si W es un subespacio vectorial de V, se puede dividir a $\mathfrak{B}$ en dos conjuntos disjuntos:*

$$\mathfrak{B}'' = \{v_j : \ j \in I\} \quad \wedge \quad \mathfrak{B}''' = \{v_k : \ k \in J \backslash I\}$$

es decir:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{''} \oplus \mathfrak{B}^{'''}$$

tal que W tiene una base de la forma $\mathfrak{B}^{'} = \{w_j : \ (j \in I \quad \wedge \quad w_j = v_j + u_j)\}$, en donde $u_j \in L(\mathfrak{B}^{'''})$ y si se define la función φ de la siguiente forma: $\varphi(w_j) = v_j$ entonces φ es una función inyectiva sobre $\mathfrak{B}^{''}$.

Demostración:

Por hipótesis tenemos que W es un subespacio vectorial de V, entonces por el teorema 3.12 existe un complemento de W en V, tal que:

$$V = W \oplus W'$$

Así que si $\mathfrak{B}^{''} = \{v_j : \ j \in I\}$ es una base de W, entonces debe existir una base $\mathfrak{B}^{'''} = \{v_k : \ k \in J \backslash I\}$ de W' (esto lo podemos ver en la demostración del teorema 3.12).

Supongamos que $w_j = v_j + u_j$, en donde $v_j \in \mathfrak{B}^{''}$ y $u_j \in L(\mathfrak{B}^{'''})$. Debemos demostrar que $\mathfrak{B}^{'}$ es una base de W.

($\star$) $\mathfrak{B}^{'}$ es linealmente independiente.

Sea

$$\sum_{j \in I} \beta_j w_j = 0$$

entonces como por suposición tenemos que $w_j = v_j + u_j$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} \beta_j w_j &= \sum_{j \in I} \beta_j (v_j + u_j) \\ &= \sum_{j \in I} (\beta_j v_j + \beta_j u_j) \\ &= \sum_{j \in I} \beta_j v_j + \sum_{j \in I} \beta_j u_j \end{aligned}$$

y puesto que $\{v_j : \ j \in I\}$ es una base de W, entonces:

$$\sum_{j \in I} \beta_j v_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_j = 0$$

por lo tanto:

$$\beta_j = 0; \quad \forall j \in I$$

Entonces el conjunto $\mathfrak{B}^{'}$ es linealmente independiente.

$\diamond$

($\star\star$) $\mathfrak{B}^{'}$ genera a W.

Supongamos que $v \in W$ y como $v \in V$, entonces:

$$v = w + w^{'}$$

en donde $w \in W$, $w^{'} \in W^{'}$, por lo tanto:

$$w = \sum_{j \in I} \beta_j v_j \quad \wedge \quad \sum_{k \in J \setminus I} \lambda_k v_k$$

por consiguiente:

$$v = w + w^{'} = \sum_{j \in I} \beta_j v_j + \sum_{k \in J \setminus I} \lambda_k v_k$$

y como $v_j = w_j - u_j$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j \in I} \beta_j (w_j - u_j) + \sum_{k \in J \setminus I} \lambda_k v_k \\ &= \sum_{j \in I} \beta_j w_j - \sum_{j \in I} \beta_j u_j + \sum_{k \in J \setminus I} \lambda_k v_k \end{aligned}$$

Así que:

$$v - \sum_{j \in I} \beta_j w_j = \sum_{k \in J \setminus I} \lambda_k v_k - \sum_{j \in I} \beta_j u_j$$

y entonces:

$$v - \sum_{j \in I} \beta_j w_j \in W^{'}$$

y como además:

$$v - \sum_{j \in I} \beta_j w_j \in W$$

entonces como $W \cap W' = \{0_V\}$, se debe tener que:

$$v - \sum_{j \in I} \beta_j w_j = 0$$

así que:

$$v = \sum_{j \in I} \beta_j w_j$$

y con esto probamos que $\mathfrak{B}'$ es un conjunto generador de W.

Ahora nos falta por demostrar que si tenemos una función definida del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathfrak{B}' & \longrightarrow & \mathfrak{B}'' \\ & : & w_j & \longmapsto & v_j \end{array}$$

Entonces esta función es inyectiva.
Supongamos que $v_j,\ v_{j'} \in \mathfrak{B}''$, tal que $v_j \neq v_{j'}$ (es decir, $v_j,\ v_{j'}$ son elementos distintos de $\mathfrak{B}''$). Entonces $w_j \neq w_{j'}$, puesto que si $w_j = w_{j'}$, entonces:

$$v_j - v_{j'} \in W \quad \wedge \quad v_j - v_{j'} \in W'$$

por consiguiente $v_j \neq v_{j'} = 0$, con lo cual:

$$v_j = v_{j'}$$

y esto es una contradicción con el hecho de que $v_j \neq v_{j'}$.
Entonces φ es una función inyectiva.

□

3.8. Reformulación de la definición de bases ordenadas y coordenadas

Un hecho notorio que se percibe en la definición que se realiza en los textos clásicos de Álgebra Lineal de bases ordenadas y coordenadas para espacios vectoriales es que existe cierta ambigüedad o imprecisión en la formalización de tales conceptos, así como la omisión de estas definiciones para espacios vectoriales de dimensión infinita.

Ahora cuando se enfoca la definición de base ordenada de un espacio vectorial de dimensión finita como una sucesión finita de vectores linealmente independientes y que generan a V, entonces se nos presenta el problema en la función:

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \mathfrak{B}$$

que define la sucesión finita de vectores de V, que se puede notar que esta función siempre existe. En virtud de las observaciones anteriores reformulamos el concepto de bases ordenadas y coordenadas de la siguiente manera:

Definición 3.22 (Base ordenada) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión κ (pudiendo ser κ finito o infinito) y $\mathfrak{B}$ una base de V, junto con una función biyectiva $f : \mathfrak{B} \longrightarrow F$. Entonces el par ordenado $\widetilde{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B}, f)$ se le llama* `base ordenada` *de V.*

Ejemplo 3.22.1 *Sea $(F[x], F, +, \cdot)$ el espacio vectorial de las funciones polinomios. Sabemos que $\mathfrak{B} = \{x^i : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \omega)\}$ es una base de Hamel infinita (por el ejemplo 2.31.1). Entonces es de observar que la función f definida del siguiente modo:*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \omega & \longrightarrow & \mathfrak{B} \\ & : & i & \longmapsto & x^i; \quad \forall i \in \omega \end{array}$$

es una función biyectiva.
Por consiguiente, $\widetilde{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B}, f)$ es una base ordenada de $F[x]$.

Considerando el hecho de que cada elemento de un espacio vectorial puede ser expresado de forma única como combinación lineal (finita) de los elementos de la base ordenada $\widetilde{\mathfrak{B}}$, entonces ya se esta en propiedad de hablar de coordenadas de $v \in V$ respecto a la base ordenada $\widetilde{\mathfrak{B}}$ y esta definición la reformulamos de la siguiente forma:

Definición 3.23 (Coordenadas de v con respecto a la base ordenada $\widetilde{\mathfrak{B}}$) *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión κ (pudiendo ser κ finito o infinito) y $\mathfrak{B}$ una base de V, junto con una función biyectiva $f: \mathfrak{B} \longrightarrow F$, en donde $f(\alpha) = v_\alpha$, así que $\widetilde{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B}, f)$ es una base ordenada de V. Si $v \in V$, existen:*

$$\{v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_n}\}, \quad \textit{con } \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \{\alpha : \ \alpha < \kappa\}$$

tal que para $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subseteq F$ (c_i no nulos), tenemos que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i}$$

Entonces las `coordenadas de` v `con respecto a la base ordenada` $\widetilde{\mathfrak{B}}$ *vendrá dada por la función $[v]_{\widetilde{\mathfrak{B}}} : \kappa \longrightarrow F$, definida del siguiente modo:*

$$[v]_{\widetilde{\mathfrak{B}}}(\alpha) = \begin{cases} c_i & \textit{si } f(\alpha) = v_{\alpha_i}; \qquad (\textit{con } 1 \leq i \leq n) \\ 0 & \textit{si lo anterior no ocurre.} \end{cases}$$

Ejemplo 3.23.1 *Sea $(F[x], F, +, \cdot)$ el espacio vectorial de las funciones polinomio y $\widetilde{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{B}, f)$ es una base ordenada de $F[x]$. En donde:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \{x^i : \ (0 \leq i < \infty \ \wedge \ i \in \omega)\} \\ f(i) &= x^i; \quad \forall i \in \omega \end{aligned}$$

entonces si $p(x) \in F[x]$, por el principio del entero mínimo debe existir un $m \in \omega$, en donde si $k > m$, entonces $a_k = 0$. Además existen $\{i_0, i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \omega$ y $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\} \subseteq F$ (con a_j no nulo), tal que:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$$

Las coordenadas de $p(x)$ con respecto a la base ordenada $\widetilde{\mathfrak{B}}$ vendrá dada por la función $[v]_{\widetilde{\mathfrak{B}}} : \omega \longrightarrow F$, , definida del siguiente modo:

$$[v]_{\widetilde{\mathfrak{B}}}(j) = \begin{cases} a_j & \textit{si } f(j) = x^j; \qquad (\textit{para algun } j \textit{ tal que } \ 0 \leq j \leq m) \\ 0 & \textit{si } k > m. \end{cases}$$

3.9. «Equipotencia» entre espacio vectoriales y la clase de los cardinales

En primer término debemos explicar el uso de las comillas francesa en el término de equipotencia del título de esta sección. La razón de este hecho deriva, puesto que cuando hablamos de equipotencia, nos referimos a una función biyectiva entre dos conjuntos. Como es conocido, la colección de todos los cardinales no constituye un conjunto sino una clase propia. En tal sentido, en esta sección se demostrará que existen tanto espacios vectoriales como cardinales y, en consecuencia, podemos hablar de «equipotencia» de clases.

Es posible asociar a cada espacio vectorial de dimensión n (con $n \in \omega$), con el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pero ahora la pregunta inmediata que debe resultar es la siguiente: ¿qué ocurre cuando el espacio vectorial es de dimensión infinita? ¿con que conjunto lo podemos colocar en correspondencia biunívoca, de forma que se establezca una equipotencia? La repuestas a estas interrogantes la podemos aclarar en el siguiente teorema, pero antes consideremos la siguiente definición que será de utilidad para la demostración del resultado.

Definición 3.24 (Soporte y Soporte Finito) *Sea* $\{V_i : \ i \in \kappa\}$ *(en donde* κ *es un cardinal) una familia de espacios vectoriales sobre el cuerpo* F*. El* `soporte` *de una función:*

$$f : \kappa \longrightarrow \bigcup_{i\in\kappa} V_i$$

es el conjunto:

$$\boldsymbol{supp}(f) = \{i \in \kappa : \ f(i) \neq 0\}$$

Una función f *tiene* `soporte finito` *si*

$$\mid \boldsymbol{supp}(f) \mid < \omega$$

Teorema 3.25 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita y $(F^{\kappa})_0$ el conjunto de todas las funciones de κ en F con soporte finito. Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F (F^{\kappa})_0 = \kappa$$

<u>Demostración:</u>

Sea κ un cardinal infinito y como se dijo anteriormente, tenemos que $(F^{\kappa})_0$ es el conjunto de todas las funciones de κ en F con soporte finito.

Por lo tanto, por el ejemplo 2.1.3, tenemos que $((F^{\kappa})_0, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial con la operación de adición y multiplicación escalar definida como en las ecuaciones 2.6 y 2.7.

Para cada $\alpha, \beta \in \kappa$, se generaliza la función Delta de Kronecker de la siguiente manera:

$$\delta_{\alpha}(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta; \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

entonces se define el conjunto $\mathfrak{B}^*$ de la forma siguiente:

$$\mathfrak{B}^* = \{\delta_{\alpha} : \quad \alpha \in \kappa\}$$

Se debe demostrar que $\mathfrak{B}^*$ forma una base de Hamel infinita de $(F^{\kappa})_0$.

($\star$) $\mathfrak{B}^*$ es un sistema generador de $(F^{\kappa})_0$.

Sea $f \in (F^{\kappa})_0$, entonces debemos probar que f puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}^*$. Así que sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ los ordinales α en κ, para los cuales $f(\alpha) \neq 0$. Entonces si $f(\alpha_j) = \lambda_j$ (donde $1 \leq j \leq m$) con $\lambda_j \in F$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f(\alpha_j) &= f(\alpha_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} f(\alpha_j)\delta_{\alpha_j}(\beta); \qquad \forall \beta \in \kappa \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \delta_{\alpha_j}(\beta); \qquad \forall \beta \in \kappa \\ &= \lambda_1 \delta_{\alpha_1}(\beta) + \lambda_2 \delta_{\alpha_2}(\beta) + \cdots + \lambda_m \delta_{\alpha_m}(\beta); \qquad \forall \beta \in \kappa \end{aligned}$$

por consiguiente:

$$f \; = \; \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \delta_{\alpha_j}$$

así que, $\mathfrak{B}^*$ genera a $(F^\kappa)_0$.

($\star\star$) $\mathfrak{B}^*$ es linealmente independiente.

Debemos demostrar que todo subconjunto finito de $\mathfrak{B}^*$ es linealmente independiente. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in F$ y $\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}, \ldots, \delta_{\alpha_m} \in \mathfrak{B}^*$, tales que:

$$\lambda_1 \delta_{\alpha_1}(\beta) + \lambda_2 \delta_{\alpha_2}(\beta) + \cdots + \lambda_m \delta_{\alpha_m}(\beta) \; = \; 0 \tag{3.3}$$

y se cumple de la ecuación 3.3 que:

$$\lambda_j \; = \; 0 \qquad (1 \leq j \leq m)$$

Entonces $\mathfrak{B}^*$ es linealmente independiente.

Por consiguiente, $\mathfrak{B}^*$ es una base de $(F^\kappa)_0$.

Ahora se puede definir una función g, de la forma siguiente:

$$\begin{array}{cccc} g & : & \kappa & \longrightarrow & \mathfrak{B}^* \\ & : & \alpha & \longmapsto & \delta_\alpha \end{array}$$

por lo tanto,

$$\delta_\alpha(\beta) = \delta_{\alpha'}(\beta) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \alpha'$$

por definición de la función delta de Kronecker generalizada y la sobreyectividad se cumple de forma inmediata de la definición de $\mathfrak{B}^*$. Así que:

$$| \; \mathfrak{B}^* \; | \; = \; \kappa$$

por definición A.19. Y como por suposición κ es un cardinal infinito, entonces se tiene que $\mathfrak{B}^*$ es una base de Hamel infinita.

Por lo tanto:

$$\mathbf{dim}_F (F^\kappa)_0 \; = \; \kappa$$

$\square$

3.10. Espacios duales infinitos

Existe una gran diferencia entre los espacios vectoriales de dimensión finita con los que poseen dimensión infinita en el caso de los espacios duales. Es de observar que si $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces se cumple que:

$$\mathbf{dim}_F V^* = \mathbf{dim}_F V \tag{3.4}$$

por el teorema 2.68. Pero cuando el espacio vectorial es infinito dimensional, entonces no se cumple la ecuación 3.4 y esto puede se notar en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.25.1 *Sea* $(V, \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión infinita, en donde* $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ *y sea* $\mathfrak{B}$ *una base de Hamel infinita de* V*. Puesto que los escalares son sólo los elementos* $\overline{0}$ *y* $\overline{1}$*, entonces una combinación lineal de* $\mathfrak{B}$ *con coeficientes escalares en* $\mathbb{Z}_2$ *es justamente una suma finita, por lo tanto,* V *es el conjunto de todas las sumas finitas de vectores en* $\mathfrak{B}$ *y por el teorema A.30, se obtiene:*

$$\mid V \mid \;\leq\; \mid [\mathfrak{B}]^{<\omega} \mid = \mid \mathfrak{B} \mid$$

Además cada funcional $f \in V^*$ *esta únicamente determinado por especificar los valores en la base* $\mathfrak{B}$*, puesto que si* $v \in V$*, entonces:*

$$v = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} v_{i_j} = \alpha_{i_1} v_{i_1} + \alpha_{i_2} v_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_m} v_{i_m}$$

así que:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} v_{i_j}\right) \\ &= \alpha_{i_1} f(v_{i_1}) + \alpha_{i_2} f(v_{i_2}) + \cdots + \alpha_{i_m} f(v_{i_m}) \end{aligned}$$

por lo tanto, como $f(v_{i_j})$ *(con* $1 \leq j \leq m$*) debe tener valores* $\overline{0}$ *y* $\overline{1}$*, entonces especificar un funcional lineal es equivalente a determinar los subconjunto de* $\mathfrak{B}$ *en* *la cual f toma el valor de 1. De esta manera existe una función biyectiva entre los funcionales lineales en V y todos los subconjuntos de $\mathfrak{B}$. Por lo tanto*

$$\mid V^* \mid = \mid \mathcal{P}(\mathfrak{B}) \mid > \mid \mathfrak{B} \mid \geq \mid V \mid$$

entonces:

$$\mid V^* \mid > \mid V \mid$$

y este ejemplo nos prueba que V^* no puede ser isomorfo a V, no para algún subconjunto propio de V, entonces:

$$\boldsymbol{dim}_F V^* > \boldsymbol{dim}_F V$$

Con el ejemplo estudiado anteriormente, podemos considerar los siguientes resultados:

Teorema 3.26 *Sea $(V, F, +, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión infinita y*

$$\mathfrak{B} = \{v_i : \ i \in \kappa\}$$

una base de Hamel infinita de V. Entonces el conjunto $\mathfrak{B}^* = \{v_i^* : \ i \in \kappa\}$ es linealmente independiente en V^*.

Demostración:

Por definición 2.70 (definición de base dual) se tiene que

$$v_i^*(v_j) \ = \ \delta_{ij} \tag{3.5}$$

Entonces se debe demostrar que cualquier subconjunto finito de $\mathfrak{B}^*$ es linealmente independiente. Sean $v_{i_1}^*, v_{i_2}^*, \ldots, v_{i_m}^* \in \mathfrak{B}^*$ y $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m} \in F$; tales que:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} v_{i_j}^* \ = \ \alpha_{i_1} v_{i_1}^* + \alpha_{i_2} v_{i_2}^* + \cdots + \alpha_{i_m} v_{i_m}^* = 0$$

y puesto que por la ecuación 3.5, se tiene que:

$$v_{i_j}^*(v_{i_k}) \ = \ \delta_{i_j i_k} \tag{3.6}$$

en donde $v_{i_k} \in \mathfrak{B}$. Así que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} v_{i_j}^* &= 0 \\
\alpha_{i_1} v_{i_1}^* + \alpha_{i_2} v_{i_2}^* + \cdots + \alpha_{i_m} v_{i_m}^* &= 0 \\
\alpha_{i_1}[v_{i_1}^*(v_{i_k})] + \alpha_{i_2}[v_{i_2}^*(v_{i_k})] + \cdots + \alpha_{i_m}[v_{i_m}^*(v_{i_k})] &= 0 \\
\alpha_{i_1}\delta_{i_1 i_k} + \alpha_{i_2}\delta_{i_2 i_k} + \cdots + \alpha_{i_m}\delta_{i_m i_k} &= 0 \\
\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j}\delta_{i_j i_k} &= 0
\end{aligned}$$

y por la definición 2.67, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j}\delta_{i_j i_k} = 0 = \alpha_{i_j}$$

con $1 \leq j \leq m$. Entonces $\mathfrak{B}^*$ es linealmente independiente.

$\square$

Teorema 3.27 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión infinita. Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F V^* > \boldsymbol{dim}_F V$$

Demostración:

Supongamos que:

$$\mathfrak{B} = \{v_\alpha : \alpha < \kappa\} \tag{3.7}$$

es una base de Hamel infinita de V, en donde $|\mathfrak{B}| = \kappa$ (siendo κ un cardinal infinito). Entonces por el teorema 3.26 el conjunto:

$$U^* = \{u_\alpha^* : \alpha < \kappa\} \tag{3.8}$$

es linealmente independiente en V^*, en donde $|U^*| = \kappa$. Por consiguiente, por el teorema 3.6 debe existir una base de Hamel infinita $\mathfrak{B}^*$ de V^*, con

$$\mathfrak{B}^* = \{v_\alpha^* : \alpha < \lambda\} \tag{3.9}$$

en donde $|\mathfrak{B}^*| = \lambda$, tal que

$$U^* \subseteq \mathfrak{B}^*$$

entonces:

$$| U^* | \leq | \mathfrak{B}^* |$$

por lo tanto:

$$\kappa \leq \lambda \tag{3.10}$$

y como:

$$| \mathfrak{B} | = \kappa = \mathbf{dim}_F V \tag{3.11}$$

$$| \mathfrak{B}^* | = \lambda = \mathbf{dim}_F V^* \tag{3.12}$$

entonces, por las ecuaciones 3.11 y 3.12; juntamente con la desigualdad 3.10, obtenemos que

$$\mathbf{dim}_F V^* \geq \mathbf{dim}_F V$$

□

Teorema 3.28 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión* κ *(en donde* κ *es un cardinal infinito) y sea* μ *el cardinal asociado al cuerpo* F*. Entonces el cardinal de* V *es* $\kappa \cdot \mu$*. Así tenemos que:*

$$|V| = max\{|F|, \boldsymbol{dim}_F V\}$$

Demostración:

Supongamos que $\mathfrak{B} = \{v_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una base de Hamel infinita de V. Por lo tanto, se tiene que para cada vector no nulo $v \in V$, tiene una representación única como:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i}; \quad c_i \neq 0$$

en donde $c_i \in F$, $n \in \omega$. Puesto que si se asume que $v \in V$ posee dos representaciones, digamos que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i}; \quad c_i \neq 0, \ \ c_i \in F$$

$$v = \sum_{j=1}^{m} b_j v_{\alpha_j}; \quad b_j \neq 0, \ \ b_j \in F$$

entonces:

$$\begin{aligned} v - v &= \sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i} - \sum_{j=1}^{m} b_j v_{\alpha_j} \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i} - \sum_{j=1}^{m} b_j v_{\alpha_j} \end{aligned}$$

y como los $c_i \neq 0$ y $b_j \neq 0$, entonces el conjunto $\{v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_n}, v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_m}\}$ es linealmente dependiente, contradicción puesto que este es un subconjunto de la base de Hamel infinita $\mathfrak{B}$ y este debe ser linealmente independiente.

Entonces, como cada elemento no nulo de V se expresa como combinación lineal única de los elementos de $\mathfrak{B}$, luego existe un subconjunto finito F_v de $\mathfrak{B}$, de modo que v se exprese como combinación lineal de los elementos de F_v, con todos los coeficientes no nulos.

Consideremos la función f definida de la siguiente manera: si $v \in V$ (con v no nulo), sabemos por la discusión anterior que existen $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ no nulos, tales que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i}; \quad (de \ \ manera \ \ unica)$$

hagamos entonces $F_v = \{v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_n}\}$ y $f(v) = F_v$.

Al ser $\mathfrak{B}$ una base de Hamel infinita de V, entonces F_v es único para cada $v \in V$ y también la n-tupla $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, con los componentes no todos nulos en F es única para cada $v \in V$.

Puesto que $\mathfrak{B} = \{v_\alpha : \ \alpha < \kappa\}$ es un conjunto infinito, entonces el número cardinal del conjunto de subconjuntos que contienen n-elementos de $\mathfrak{B}$ es igual κ (por el teorema A.30) que nos asegura que si $\mathfrak{B}$ es un conjunto infinito, entonces:

$$|[\mathfrak{B}]^{<\omega}| = |\mathfrak{B}|$$

y en este caso se tiene:

$$|[\mathfrak{B}]^{<\omega}| = |\mathfrak{B}| = \mathbf{dim}_F V = \kappa$$

Por otra parte, el número cardinal del conjunto de las n-tuplas $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ es μ^n, y es de observar que $\mu^n = \mu$ o este es finito.

En cada caso el número cardinal del conjunto de pares que consiste de los conjuntos $\{v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2}, \ldots, v_{\alpha_n}\}$ y las n-tuplas $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ es $\kappa \cdot \mu$.

Entonces es de notar que:

$$|V| = \sum_{\alpha<\kappa} \mu \cdot \kappa$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} |V| &= \mu \cdot \textstyle\sum_{\alpha<\kappa} \kappa && \star \text{ Por teorema A.34.} \\ &= \mu \cdot (|\kappa| \cdot \mathbf{sup}\{\kappa : \ \alpha < \kappa\}) && \star \text{ Por teorema A.35.} \\ &= \mu \cdot (\kappa \cdot \kappa) \end{aligned}$$

y como por hipótesis κ es un cardinal infinito, pues V es un espacio vectorial infinito dimensional y $|\mathfrak{B}| = \kappa$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} |V| &= \mu \cdot (\kappa \cdot \kappa) \\ &= \mu \cdot \kappa \\ &= \mathbf{max}\{\kappa, \mu\} \\ &= \mathbf{max}\{|F|, \mathbf{dim}_F V\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se demostró que:

$$|V| = \{|F|, \mathbf{dim}_F V\}$$

□

Teorema 3.29 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial de dimensión* κ *(en donde* κ *es un cardinal infinito) y* μ *el número cardinal asociado a el cuerpo* F. *Entonces:*

$$\boldsymbol{dim}_F V^* = \mu^\kappa$$

Demostración:

Parte i):

Supongamos que $\mathfrak{B} = \{v_\alpha : \ \alpha < \kappa\}$ es una base de Hamel infinita de V. Si $f \in V^*$, se puede observar que f esta determinado por sus valores en una base del espacio vectorial.

Puesto que si $v \in V$, entonces existen $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \kappa$ y $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subseteq F$ (únicos) tales que podemos escribir a v como combinación lineal de los elementos de un subconjunto finito de $\mathfrak{B}$, de la siguiente forma:

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i} \tag{3.13}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_{\alpha_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i v_{\alpha_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i f(v_{\alpha_i}) \end{aligned}$$

y como los $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subseteq F$ dependen exclusivamente de $v \in V$ (ver 3.13), esta claro que el valor que asume f en cada $v_{\alpha_i} \in \mathfrak{B}$ determina al valor de f en cualquier vector del espacio y por tanto determinan a $f \in V^*$.

Parte ii):

Primeramente comprobemos $|V^*| = |F^{\mathfrak{B}}| = \mu^\kappa$.

$(\star)$ $F^{\mathfrak{B}} \preceq V^*$.

Definamos la función ψ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} \psi & : & F^{\mathfrak{B}} & \longrightarrow & V^* \\ & : & f & \longmapsto & g_f \end{array}$$

En donde;

$$F^{\mathfrak{B}} = \{f : \ (f : \mathfrak{B} \longrightarrow F) \ \wedge \ Dom(f) = \mathfrak{B}\}$$

Sea $f \in F^{\mathfrak{B}}$; $f : \mathfrak{B} \longrightarrow F$, por la parte i) existe un único elemento $g_f \in V^*$ tal que

$$g_f \upharpoonright \mathfrak{B} \equiv f$$

Evidentemente ψ es inyectiva.

($\star\star$) $V^* \preceq F^{\mathfrak{B}}$.

Sea $f \in V^*$, sea $g_f : \mathfrak{B} \longrightarrow F$ dada por $g_f(v_\alpha) = f(v_\alpha)$; $\forall \alpha < \kappa$.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & : & V^* & \longrightarrow & F^{\mathfrak{B}} \\ & : & f & \longmapsto & g_f \end{array}$$

Probemos que φ es inyectiva.

Sean f, h V^*, tal que

$$\varphi(f) = \varphi(h) \implies g_f = g_h \implies \forall v_\alpha \in \mathfrak{B}; \ f(v_\alpha) = h(v_\alpha)$$

entonces por la parte i) $f \equiv h$.

Por lo tanto, por el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder (teorema A.22) obtenemos que $|V^*| = |F^{\mathfrak{B}}| = \mu^\kappa$.
Por lo tanto, el número cardinal de V^* es μ^κ.
Por otra parte, si tenemos que

$$\mathbf{dim}_F V^* = \lambda$$

y de esta manera se debe tener que λ es un cardinal infinito, puesto que por el teorema 3.27

$$\mathbf{dim}_F V^* > \mathbf{dim}_F V$$

y como $\kappa = \mathbf{dim}_F V$ es un cardinal infinito, entonces se debe tener que λ es un cardinal infinito.

Además, por el teorema 3.28 se demostró que

$$\begin{aligned} |V^*| &= max\{|F|, \mathbf{dim}_F V^*\} & (3.14) \\ &= \lambda \cdot \mu & (3.15) \end{aligned}$$

y como además $|V^*| = \mu^\kappa$, entonces

$$|V^*| = \mu^\kappa = \lambda \cdot \mu \tag{3.16}$$

Debemos demostrar que

$$|V^*| = \lambda$$

y así llegar a la conclusión de que

$$\mathbf{dim}_F V^* = \mu^\kappa$$

puesto que con esto observaremos que

$$max\{|F|, \mathbf{dim}_F V^*\} = \lambda$$

y

$$\lambda = \mathbf{dim}_F V^* = \mu^\kappa$$

Se tienen dos casos en particular:

($\star$) $\mu < \omega$.

Es obvio que $\lambda > \mu$, puesto que λ es un cardinal infinito, es decir, $\lambda \geq \omega$, entonces

$$\lambda > \mu$$

$\star\star$ $\mu \geq \omega$.

Es decir, λ, μ cardinales infinitos.

Se debe demostrar que $\mu^\kappa > \mu$.

Supongamos que $|F^{\mathfrak{B}}| = \mu$. Es decir, $\lambda \cdot \mu = max\{|F|, \mathbf{dim}_F V^*\} = \mu$.

Sea $F^{\mathfrak{B}} = \{g_\alpha : \alpha < \mu\}$, tal que $g_\alpha : \mathfrak{B} \longrightarrow F$.

Definamos

$$g : \mathfrak{B} \longrightarrow F$$

de la siguiente forma:

$g(\alpha)$ un elemento cualquiera de $F \backslash \{g_\alpha(\alpha)\} \neq \emptyset$.

Luego para cada $\alpha < \mu$:

$$g(\alpha) \neq g_\alpha(\alpha);$$

por tanto;

$$g \neq g_\alpha; \quad \forall \alpha < \mu$$

contradicción con el hecho de que $|F^{\mathfrak{B}}| = \mu$. Y así

$$|F^{\mathfrak{B}}| > \mu$$

entonces

$$|F^{\mathfrak{B}}| = \mu^\kappa = \lambda$$

y con esto demostramos que

$$\mathbf{dim}_F V^* = \mu^\kappa$$

$\square$

Capítulo 4

Conclusiones y reflexiones finales

Podemos concluir afirmando que el presente trabajo se realizó con la intención de estimular el estudio del Álgebra Lineal de manera unificada, introduciendo conceptos fundamentales de esta área del Álgebra, entre los que podemos mencionar: dimensión, bases ordenadas y coordenadas de un espacio vectorial; enfatizando de forma precisa los aspectos comunes cuando el espacio es de dimensión finita y el caso cuando la dimensión es infinita.

Es importante resaltar la existencia de un gran número de problemas abiertos relacionado con la temática presentadas en este trabajo, entre los cuales destacan:

1. Equivalencia entre el axioma de elección y la existencia de las bases de Hamel infinitas.

   Es un hecho bien conocido que el axioma de elección (más precisamente, uno de sus equivalentes, el lema de Zorn-Kuratowski) implica la existencia de una base para cualquier espacio vectorial. Una pregunta natural que puede formularse es: asumiendo que cualquier espacio vectorial tiene una base, ¿podrá derivarse el axioma de elección? En forma más precisa, será cierto lo siguiente: todo espacio vectorial tiene una base sí y sólo sí el axioma de elección. J. D. Halpern (ver [6]) mostró una versión más débil de la aseveración anterior: axioma de elección sí y sólo sí cada conjunto generador de un espacio vectorial contiene una base del espacio. Más tarde, Andreas Blass (consultar [1]) demostró que asumiendo el conjunto de axiomas más restringidos que Zermelo-Fraenkel (llamado WZF, en el cual se omite el axioma de regularidad y se admiten átomos) es cierto que: el axioma de elección múltiple es deducible de la afirmación: cada espacio vectorial tiene una base (recordemos que, el axioma de elección múltiple asegura que para cada familia de conjunto no vacíos existe una función la cual asigna a cada conjunto en la familia de subconjunto finito no vacío). Este problema continua abierto (considerando Zermelo-Fraenkel y la versión clásica del axioma de elección).

2. La conexión entre las transformaciones lineales de espacios vectoriales de dimensión infinitas y las matrices infinitas.

   Se debe profundizar las ideas de transformación lineal sobre los espacios vectoriales de dimensión infinita y el concepto de matrices infinitas, y establecer el isomorfismo que existe entre estos.

   Es de observar que cualquier transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar como una matriz en las bases ordenadas de los dos espacios vectoriales (ver observación realizada en el ejemplo 2.55.1). Ahora la pregunta inmediata es: ¿si uno de los espacios vectoriales es de dimensión infinita, la transformación lineal todavía se representa como una matriz en sus bases ordenadas? Es decir, la forma de asignar una matriz a una transformación lineal (en ciertas bases) cuando al menos uno de los espacios involucrados es de dimensión infinita.

3. Las diferencias y similitudes entre los espacios vectoriales infinito dimensionales y los espacios de Hilbert [1].

   En este trabajo se conceptualizó la definición de bases de Hamel infinitas y

[1]Por el apellido del famoso matemático alemán David Hilbert (1862-1943) que introdujo este concepto.

además se demostró que todas las bases de Hamel infinitas tienen el mismo número cardinal asociado y este número cardinal es lo que se conoce como `dimensión de Hamel`.

El mismo estudio se puede realizar sobre los espacios vectoriales de Hilbert y se puede demostrar que la dimensión de Hamel es mayor o igual a la dimensión de Hilbert; y se puede realizar un estudio similar entre los espacios vectoriales de dimensión infinita y los espacios vectoriales de Hilbert.

4. Estudiar los espacios vectoriales topológicos de dimensión infinita. Es de observar que si W es un subespacio de un espacio vectorial topológico V, tal que $V = W \oplus W'$, entonces se dice que W es el `subespacio complementario` de W'. Tal subespacio complementario no necesariamente existe para todo subespacio de un espacio vectorial topológico. A diferencia de los espacios vectoriales de dimensión infinita en donde todo subespacio de este tiene un subespacio complementario.

5. Cuando se considera un espacio vectorial con producto interno de dimensión infinita. ¿es válido el proceso de Gram-Schmidt? ¿qué ocurre en un espacio de Hilbert?

6. Supongamos que $(V, F, +, \cdot)$ es un espacio vectorial con $\mathbf{dim}_F V = \kappa$ $(\kappa \geq \omega)$ y $\mathfrak{P} = \{P_\alpha : \ \alpha < \beta\}$ $(\beta \geq \omega)$ una partición de V.

   ¿Existe $\mathfrak{B} = \{x_\alpha : \ \alpha < \beta\} \subseteq V$, tal que:

   a) $\mathfrak{B}$ es base de V y

   b) $\forall \alpha < \beta; \ x_\alpha \in P_\alpha$?.

Apéndice A

Teoría de conjuntos

A.1. Teoría axiomática de conjuntos Zermelo-Fraenkel

1. **Axioma de existencia:** Existe un conjunto que no tiene elementos.

2. **Axioma de extensionalidad:** Si X y Y son conjuntos que tienen los mismos elementos, entonces $X = Y$.

3. **Axioma de pares:** Para cualquier par de conjuntos X, Y existe el conjunto $\{X, Y\}$ que contiene exactamente a X y a Y.

4. **Axioma esquema de separación:** Si φ es una propiedad (con parámetro p), entonces para cualquier conjunto X y parámetro p, existe un conjunto $Y = \{u \in X : \varphi(u, p)\}$ que contiene los $u \in X$ que cumplen la propiedad φ.

5. **Axioma de la unión:** Para cualquier conjunto X, existe un conjunto $Y = \bigcup X$, que es la unión de los elementos de X.

6. **Axioma de conjunto de partes:** Para cualquier conjunto X existe un conjunto $Y = \mathcal{P}(X)$, que es el conjunto de todos los subconjuntos de X.

7. **Axioma del infinito:** Existe un conjunto infinito.

8. **Axioma esquema de reemplazamiento:** Si F es una función, entonces para cualquier conjunto X se tiene que $Y = F[X] = \{F(x) : x \in X\}$ es un conjunto.

9. **Axioma de regularidad:** Cada conjunto no vacío tiene un elemento minimal con respecto a la relación de pertenencia.

10. **Axioma de elección:** Cada familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

A.2. Lema de Zorn-Kuratowski

Definición A.1 (Relación binaria) *Sea P un conjunto no vacío. Una* `relación binaria` *en P es una función*

$$\begin{array}{cccccc} * & : & P \times P & \longrightarrow & P \\ & : & (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

para cada $x, y \in P$.

Definición A.2 (Relación de equivalencia) *Sea P un conjunto no vacío y R una relación binaria sobre P. Se dice que R es una relación de equivalencia si se cumple las siguientes condiciones:*

(i) $\forall x \in P[xRx]$ *(Reflexividad).*

(ii) $\forall x \in P \forall y \in P[xRy \implies yRx]$ *(Simetría).*

(iii) $\forall x \in P \forall y \in P \forall z \in P[(xRy \quad \wedge \quad yRz) \implies (xRz)]$ *(Transitividad).*

Definición A.3 (Clase de equivalencia) *Sea R una relación de equivalencia definida sobre un conjunto no vacío P y $a \in P$. La* `clase de equivalencia` *de a módulo R es el conjunto*

$$[a] = \{x \in P : \;\; xRa\}$$

Al elemento a se le conoce como `representante de la clase`*.*

Definición A.4 (Orden Parcial) *Sea P un conjunto no vacío y R una relación binaria en P. Se dice que R es un* `orden parcial` *si:*

(i) $\forall x \in P[xRx]$ *(Reflexividad).*

(ii) $\forall x \in P \forall y \in P[(xRy \quad \wedge \quad yRx) \quad \Longrightarrow \quad (x = y)]$ *(Antisimetría).*

(iii) $\forall x \in P \forall y \in P \forall z \in P[(xRy \quad \wedge \quad yRz) \quad \Longrightarrow \quad (xRz)]$ *(Transitividad).*

Un conjunto P con un orden parcial se denomina `conjunto parcialmente ordenado`, se usa la notación de $\leq$, en lugar de R, para el orden parcial. Se denota como $(P, \leq)$ al conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo A.4.1 *Sea $P = \{x, y, z\}$ y la inclusión (denotada como $\subseteq$) la relación binaria sobre P. Por lo tanto, el conjunto de partes de P es:*

$$\mathcal{P}(P) = \{\{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \emptyset\}$$

Entonces $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Esto se puede observar gráficamente:

En general, el conjunto de partes de un conjunto dado, es un conjunto parcialmente ordenado por inclusión. Es decir, $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo A.4.2 *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y la relación binaria menor o igual (denotada como $\leq$). Entonces $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

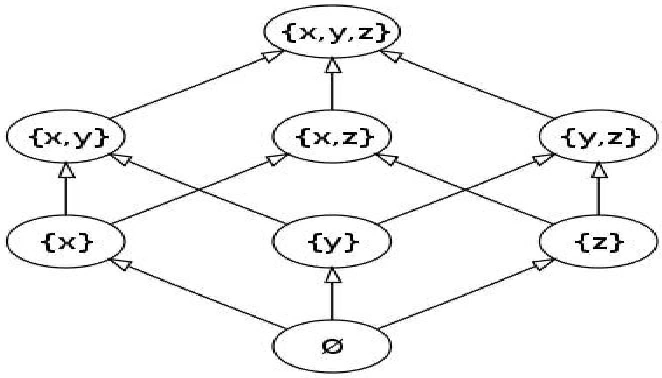


Figura A.1: Conjunto parcialmente ordenado

También se tiene que $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo A.4.3 *Sea* $(V, F, +, \cdot)$ *un espacio vectorial y* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios de* V*. Si la inclusión es la relación binaria en* V*, entonces se tiene que* $(\{W_i\}_{i\in I}, \subseteq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Definición A.5 (Elementos comparables) *Sea* $(P, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado no vacío, diremos que* $x \in P$*,* $y \in P$ *son* `elementos comparables` *si* $x \leq y \quad ó \quad y \leq x$*.*

Dos elementos no comparables se dicen que son `incomparables`.

Ejemplo A.5.1 *Sea* P *un conjunto no vacío y la relación de inclusión, la relación binaria en* P*. Entonces,* $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado (como se pudo notar en la observación realizada en el ejemplo A.4.1). Por lo tanto,* $x, y \in P$*, son comparables si y sólo si*

$$x \subseteq y \quad \vee \quad y \subseteq x$$

es decir, dos conjuntos de $\mathcal{P}$ *son comparables si uno de ellos esta contenido en el otro.*

Definición A.6 (Conjunto linealmente ordenado) *Sea $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si cada par de elementos en P son comparables, se dice que $(P,\leq)$ es un* `conjunto linealmente (o totalmente) ordenado` .

Ejemplos A.6.1

1. $(\mathbb{N},\leq)$ *es un conjunto totalmente ordenado.*

2. *De igual forma:* $(\mathbb{Z},\leq)$, $(\mathbb{Q},\leq)$ *y* $(\mathbb{R},\leq)$ *son conjuntos totalmente ordenados.*

Ejemplo A.6.2 *Sea P un conjunto con más de dos elementos. Entonces $(\mathcal{P}(P),\subseteq)$ no es un conjunto totalmente ordenado.*

Definición A.7 (Cota superior) *Sea $(P,\leq)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado y $A \subseteq P$ (con $A \neq \emptyset$), se dice que un elemento $p \in P$ es una* `cota superior` *de A, si para cualquier $a \in A$ se cumple que $a \leq p$.*

Definición A.8 (Cota inferior) *Sea $(P,\leq)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado y $A \subseteq P$ (con $A \neq \emptyset$). Se dice que un elemento $p \in P$ es una* `cota inferior` *de A en $(P,\leq)$, si $p \leq a$, para todo $a \in A$.*

Definición A.9 (Elemento maximal) *Sea $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $m \in P$ es* `maximal` *en P si para cada $x \in P$ (el cual es comparable con m) $x \leq m$.*

Definición A.10 (Elemento minimal) *Sea $(P,\leq)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado y $A \subseteq P$ (con $A \neq \emptyset$). Se dice que un elemento $a \in A$ es un* `elemento minimal` *de A en $(P,\leq)$ si no existe $x \in A$, tal que $x \leq a \quad y \quad x \neq a$.*

Definición A.11 (Supremo) *Sea $(P,\leq)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado y $A \subseteq P$ (con $A \neq \emptyset$). Una cota superior p de A es* `supremo` *de A si y sólo si para cualquier cota superior $a \in A$, tenemos que $p \leq a$.*

Es decir, el supremo de A es la menor cota superior. Denotaremos el supremo de A de la siguiente manera: **sup** A.

Definición A.12 (Ínfimo) *Sea $(P, \leq)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado y $A \subseteq P$ (con $A \neq \emptyset$) y sea $p \in A$ una cota inferior de A. Diremos que p es* `ínfimo` *de A si y sólo si para cualquier cota inferior $a \in A$, tenemos que $a \leq p$.*

Es decir, el ínfimo de A es la mayor cota inferior. Denotaremos el ínfimo de A como **inf** A.
Nótese que si un conjunto tiene supremo o ínfimo estos son únicos.

Definición A.13 (Cadena) *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto no vació A de P que es linealmente ordenado por $\leq$ es llamado una* `cadena` *en P.*

Lema A.14 (Zorn-Kuratowski) *Sea $(P, \leq)$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado, tal que toda cadena en P tiene al menos una cota superior en P, entonces P tiene elemento maximal.*

A.3. Ordinales

Definición A.15 (Buen orden) *Sea $(P, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Diremos que $\leq$ es un* `buen orden` *en P si $\forall U \subseteq P$ $(U \neq \emptyset)$ se tiene que U tiene menor elemento con respecto a $\leq$.*

Al par ordenado $(P, \leq)$, en donde $\leq$ define un buen orden, lo llamaremos `conjunto bien ordenado` y por conveniencia, siempre y cuando no haya confusión con el orden impuesto al conjunto P, entonces solo se dirá que P es un conjunto bien ordenado.
Además se tiene que todo subconjunto de un conjunto bien ordenado es también bien ordenado. También es inmediato comprobar que todo conjunto bien ordenado es un conjunto totalmente ordenado.

Ejemplo A.15.1 *Sabemos por el ejemplo A.6.1 que* $(\mathbb{N}, \leq)$ *es un conjunto linealmente ordenado. Entonces se tiene que* $\leq$ *es un buen orden.*

Ejemplo A.15.2 *El conjunto de los números enteros* $\mathbb{Z}$ *con el orden* $\leq$ *usual, no esta bien ordenado pues* $\mathbb{Z}^- = \{, \ldots, -3, -2, -1\}$*no tiene menor elemento. Por supuesto que* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *y* $(\mathbb{R}, \leq)$ *no son conjuntos bien ordenados.*

Definición A.16 (Transitivo) *Sea* P *un conjunto. Diremos que* P *es* `transitivo` *si*

$$\forall x[x \in P \quad \Longrightarrow \quad x \subseteq P]$$

Por lo tanto, un conjunto P es transitivo si cada elemento de P es también un subconjunto de P.

Definición A.17 (Número ordinal) *Sea* α *un conjunto. Diremos que* α *es un* `número ordinal` *si:*

1. α *es transitivo.*

2. $\in$ *bien ordena* α.

Esta definición se la debemos a John von Neumann (1903-1957). Por lo tanto, un conjunto α es un ordinal si y sólo si α esta totalmente ordenado con respecto a la inclusión de conjuntos y todo elemento de α es también un subconjunto de α. Denotaremos los números ordinales con las letras del alfabeto griego, en especial con las primeras letras minúsculas de este alfabeto; es decir

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$$

Ejemplo A.17.1

1. $0 = \emptyset$ *es un ordinal.*

2. $\mathbb{N}$ *es un número ordinal, tal ordinal se denota por* ω.

3. Sea $\mathcal{C}$ una clase de ordinales no vacía, entonces

$$\bigcap \mathcal{C} = \boldsymbol{inf}\ \mathcal{C} \quad y \quad \bigcup \mathcal{C} = \boldsymbol{sup}\ \mathcal{C}$$

son números ordinales.

Para una definición formal de clase consultar [12] o [17].

Definición A.18 (Ordinal sucesor y límite) *Sean α, β números ordinales. Si $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, entonces diremos que α es un* `ordinal sucesor`*. Si α no es un ordinal sucesor, diremos que α es un* `ordinal límite`*.*

Si tenemos que α es un ordinal límite, entonces

$$\alpha = \mathbf{sup}\{\beta : \ \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$$

Ejemplo A.18.1

1. $0 = \emptyset$ *es un ordinal límite, ya que no es sucesor de ningún ordinal.*

2.

$$\begin{aligned}
1 &= \{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 1 \cup \{1\}. \\
3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = 2 \cup \{2\}. \\
&\vdots \\
n &= \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}
\end{aligned}$$

son ordinales sucesores.

3. ω *es un número ordinal límite.*

A.4. Cardinalidad

Definición A.19 (Equipotentes) *Sean X e Y dos conjuntos. Diremos que X e Y son* `equipotentes` *si existe una función $f : X \longrightarrow Y$ biyectiva.*

Denotamos a dos conjuntos equipotentes del siguiente modo $|X| = |Y|$ (o bien $X \approx Y$).

Ejemplo A.19.1 *Si tenemos los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^+$, entonces $\mathbb{N} \approx \mathbb{N}^+$; puesto que podemos definir una función f como sigue;*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^+ \\ & : & n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$

la cual es biyectiva.

Ejemplo A.19.2 *Dos intervalos de números reales son siempre equipotentes, puesto que existe una función biyectiva f, que la definimos del siguiente modo;*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [a,b] & \longrightarrow & [c,d] \\ & : & x & \longmapsto & \frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-ad}{b-a} \end{array}$$

Definición A.20 *Sean X e Y dos conjuntos. Diremos que X se inyecta en Y, si existe una función $f : X \longrightarrow Y$ inyectiva. Lo representamos como $|X| \preceq |Y|$.*

Teorema A.21 (Teorema de Cantor) *Sea X un conjunto. Entonces*

$$|X| \preceq |\mathcal{P}(X)|$$

Además

$$|\mathcal{P}(X)| > |X|$$

Para una demostración de este resultado consultar [12].

Teorema A.22 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder) *Sean X e Y dos conjuntos. Si $|X| \preceq |Y|$ y $|Y| \preceq |X|$, entonces $|X| = |Y|$.*

El teorema de Cantor-Bernstein-Schröder nos dice que si tenemos conjuntos X e Y, tales que existen funciones inyectivas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow X$. Entonces existe $h : X \longrightarrow Y$ biyectiva.
Para una demostración de este resultado consultar [12].

Definición A.23 (Cardinal o número cardinal) *Sea α un conjunto. Si α es un número ordinal, diremos que α es un* `número cardinal` *si y sólo si α no es equipotente con ninguno de sus elementos.*

La teoría de los números cardinales o transfinitos fue introducida por George Cantor (1845-1918) en 1874.
Asumiendo el axioma de elección (AE), tenemos que a todo conjunto X le podemos asignar un número cardinal $|X|$, entonces de este modo tenemos que dos conjuntos cualesquiera tienen la misma cardinalidad si y sólo si estos dos conjuntos son equipotentes.
Denotamos los números cardinales con las letras del alfabeto griego, en especial con las últimas letras de este alfabeto;

$$\kappa, \lambda, \ldots, \phi, \varphi, \chi, \psi, \omega.$$

Definición A.24 (Conjunto finito) *Sea X un conjunto. Diremos que X es un* `conjunto finito` *si existe un número natural n, tal que $|X| = |n|$. Si X no es un conjunto finito, entonces diremos que X es un* `conjunto infinito`.

Entonces podemos asegurar que los únicos cardinales finitos son los números naturales, es decir, $|n| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición A.25 (Conjunto numerable) *Sea X un conjunto. Diremos que X es un* `conjunto numerable` *si X es un conjunto finito o equipotente con el conjunto de los números naturales. Si X no es un conjunto numerable, entonces diremos que X es un* `conjunto no numerable`.

Ejemplo A.25.1

1. *Asumiendo el axioma de elección, tenemos que si* $\{W_i\}_{i\in I}$ *(en donde* I *es un conjunto numerable) es una familia de conjuntos numerables, entonces*

$$\bigcup_{i\in I} W_i \quad \textit{es un conjunto numerable}$$

2. *El conjunto de los números enteros*

$$\mathbb{Z} = \{,\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots,\}$$

   es numerable.

3. *El conjunto de los números racionales es numerable.*

Para las demostraciones de estos resultados consultar [18].

Ejemplo A.25.2 *El conjunto de los números reales es no numerable.*

Para la prueba de este hecho podemos consultar [12].

A.5. Aritmética cardinal

En esta sección nos proponemos definir las operaciones de adición, multiplicación y exponenciación de números cardinales.

Definición A.26 *Sean* X *e* Y *dos conjuntos disjuntos y* κ, λ *ambos números cardinales. Si* $|X| = \kappa$ *y* $|Y| = \lambda$*. Entonces*

1. *La* `suma` $\kappa + \lambda$ *es el número cardinal de* $X \cup Y$*, es decir;*

$$\kappa + \lambda = |X \cup Y|$$

   Si tenemos un conjunto de cardinales $\{\kappa_i : i \in I\}$*, en donde* I *es un conjunto de índices, entonces definimos y denotamos la suma de la siguiente manera*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \bigcup_{i\in I} |\kappa_i| = \boldsymbol{sup}\{|\kappa_i| : \ i \in I\}$$

2. *La* `multiplicación` $\kappa \cdot \lambda$ *es el número cardinal de* $X \times Y$*, es decir;*

$$\kappa \cdot \lambda = |X \times Y|$$

3. *La* `potencia` κ^λ *es el número cardinal de* X^Y *(en donde* X^Y *denota el conjunto de todas las funciones de* X *en* Y*), es decir,*

$$\kappa^\lambda = |X^Y|$$

Entonces tenemos los siguientes resultados con respecto a las operaciones de adición, multiplicación y potenciación antes definidas;

Teorema A.27 *Sean* κ, λ, μ *números cardinales infinitos. Entonces se cumple que:*

1. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$ *(Conmutatividad).*
2. $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$ *(Asociatividad).*
3. $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$ *(Distributividad).*
4. $\kappa + 0 = \kappa$.
5. *Si* $\kappa + 1 = \lambda + 1$*, entonces* $\kappa = \lambda$.
6. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
7. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
8. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
9. *Si* $\kappa \leq \lambda$*, entonces* $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
10. *Si* $0 < \lambda \leq \mu$*, entonces* $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.
11. $\kappa^0 = 1$.

12. $1^\kappa = 1$

13. $0^\kappa = 0$, *si* $\kappa > 0$.

La demostración de este teorema se puede consultar en [22] y [13].

Definición A.28 (Aleph) *Para todo ordinal* α*, definimos la operación* $\aleph$ *(*`aleph`*) recursivamente para todo ordinal*

$$\begin{array}{ccccccl} \aleph_0 & = & \omega_0 & = & \omega; & & \omega \ \textit{representa el ordinal asociado a } \mathbb{N}. \\ \aleph_{\alpha+1} & = & \omega_{\alpha+1} & = & \aleph_\alpha^+; & & \\ \aleph_\alpha & = & \omega_\alpha & = & \boldsymbol{sup}\{\omega_\alpha : \ \beta < \alpha\}; & & \textit{si } \alpha \textit{ es un ordinal límite.} \end{array}$$

Es de notar que $\aleph_0 = \omega$, usaremos en estas notas el $\aleph_0$ cuando lo consideremos como un número cardinal y ω cuando lo consideremos como un número ordinal. Similarmente utilizaremos la notación $\aleph_\alpha$ y ω_α.
Naturalmente, por cardinal infinito entendemos un cardinal que no sea un número natural. El menor cardinal infinito es $\aleph_0$.

Ejemplo A.28.1 *Los siguientes conjuntos tienen cardinalidad* $\aleph_0$*:*

1. *El conjunto de los números racionales.*

2. *El conjunto de todos los subconjuntos finitos de* $\mathbb{N}$.

Nuestro estudio se centrará sobre los números cardinales infinitos, puesto que ellos representan la herramienta fundamental para el análisis de las propiedades de los espacios vectoriales de dimensión infinita.

Definición A.29 *Sea* A *un conjunto infinito y* κ *un número cardinal, tal que* $\kappa \leq |A|$*, entonces definimos y denotamos el conjunto de todos los subconjuntos de* A *de cardinalidad* κ *como*

$$[A]^\kappa = \{X \subseteq A : \ |X| = \kappa\}$$

y también el conjunto de todos los subconjuntos A de cardinalidad menor que κ como

$$[A]^{<\kappa} = \{X \subseteq A : \ |X| < \kappa\}$$

Teorema A.30 *Sea X un conjunto infinito. Entonces*

$$|[X]^{<\omega}| = |X|$$

Teorema A.31 *Sean κ, λ números cardinales. Si alguno de ellos es un cardinal infinito, entonces se cumple que*

$$\kappa + \lambda = \boldsymbol{max}\{\kappa, \lambda\} = \kappa \cdot \lambda$$

Para la demostración de este resultado consultar [12].

Teorema A.32 *Sea $\{A_i : \ i \in I\}$ una familia de conjuntos y I un conjuntos de índices, tal que $|I| = \kappa$. Si $|A_i| \leq \lambda$, para todo $i \in I$, entonces*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \kappa \cdot \lambda$$

Teorema A.33 *Para cualquier familia de conjuntos $\{A_i : \ i \in I\}$ se cumple que*

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \bigcup_{i\in I} |A_i| = \boldsymbol{sup}\{|A_i| : \ i \in I\}$$

y si los conjuntos son disjuntos dos a dos, entonces se cumple la igualdad.

Además tenemos otros resultados importantes:

Teorema A.34 *Sea $\{\kappa_i : \ i \in I\}$ una familia de cardinales. Entonces:*

$$\mu \cdot \sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \mu \cdot \kappa_i$$

siendo μ un número cardinal.

Teorema A.35 *Sea $\{\kappa_i : \ i \in I\}$ una familia de cardinales no nulos, de modo que $|I|$ es un cardinal infinito o algún κ_i es un cardinal infinito, entonces*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |I| \cdot \boldsymbol{sup}\{\kappa_i : \ i \in I\}$$

La demostración de este teorema puede ser consultada en [12].

Apéndice B

B.1. Funciones y conjuntos de funciones

Sean A y B ambos conjuntos, si f es una función de A en B, es decir, $Dom(f) \subseteq A$ y $Rgo(f) \subseteq B$; la escribimos como

$$\begin{array}{ccccc} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & : & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

con $x \in Dom(f)$ y el conjunto de todas las funciones con dominio A en B se define como:

$$B^A = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) : (f : A \longrightarrow B)\}$$

B.2. Sucesiones infinitas

Definición B.1 (Sucesión infinita) *Una* `sucesión infinita` *es una función cuyo dominio es el conjunto de los numeros naturales mayores que cero* ($\mathbb{N}^+$).

Si una función a es una sucesión infinita, entonces a cada número natural n le corresponde un elemento $a(n)$, estos pueden representarse como

$$a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots, \tag{B.1}$$

y para obtener la forma de subíndice de una sucesión, hacemos $a_n = a(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así que (B.1) se convierte en

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

y esta sucesión infinita se suele designar mediante el siguiente símbolo $\{a_n\}$. Además si $Rgo(a) \subseteq \mathbb{R}$, entonces se dice que $\{a_n\}$ es una `sucesión infinita de números reales` y si $Rgo(a) \subseteq \mathbb{C}$, se dice que $\{a_n\}$ es una `sucesión infinita de números comp`

Definición B.2 (Convergencia) *Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Se dice que $\{a_n\}$* `converge hacia` *a, si para todo $\epsilon > 0$, existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, si $n > N$, entonces $|a_n - a| < \epsilon$. Denotamos tal situación como*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

B.3. Funciones medibles

La teoría de la medida es de gran importancia tanto para el análisis matemático, como para la teoría de probabilidades, además de otras areas de las matemáticas. Los conceptos que se van a considerar a continuación son solo unos preliminares para introducir ciertos espacios vectoriales que son de vital importancia para el estudio que se esta realizando.

Definición B.3 (σ-álgebras) *Sea* X *un conjunto. Una* σ-`álgebra` *sobre* X *es una familia $\mathcal{A}$ no vacía de subconjuntos de* X *(es decir, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ y $\mathcal{A} \neq \emptyset$), con las siguientes propiedades:*

(i) $\emptyset, \mathrm{X} \in \mathcal{A}$.

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \implies A^c = \mathrm{X} \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \in \mathcal{A}$ *con* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, *entonces*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

A los elementos del conjunto $\mathcal{A}$ se les conocen como `conjuntos medibles`*.*

Definición B.4 (Espacios de medidas) *Sea* X *un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de* X*. Una función $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty) \cup \{\infty\}$ es una* `medida` *si se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$ son disjuntos dos a dos (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para cualquier $i \neq j$), entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

A esta propiedad se le conoce como `numerablemente aditiva`*. La terna $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ es un* `espacio de medida`*.*

Definición B.5 (Función medible) *Sean $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, M_x)$ y $(\mathrm{Y}, \mathcal{B}, M_y)$ ambos espacios de medidas. Una función f de* X *en* Y *(con $Dom(f) = \mathrm{X}$ y $Rgo(f) \subseteq \mathrm{Y}$) es una* `función medible` *si*

$$\{\forall B \in \mathcal{B} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

Gráficamente podemos expresar la idea que encierra esta definición así:

B.4. Ecuaciones lineales

Un `sistema de ecuaciones lineales` es un conjunto de ecuaciones lineales sobre un cuerpo o un anillo conmutativo (para la definición de anillo conmutativo consultar [20]).

El problema de los sistemas de ecuaciones lineales es uno de lo más antiguos de la matemática y posee una gran cantidad de aplicaciones, tales como: en procesamiento digital de señales, estimación, predicción, programación lineal, entre otros.

Sea F un cuerpo, un sistema de ecuaciones lineales, con m ecuaciones lineales y n incógnitas (con $n, m \in \mathbb{N}^+$), puede ser escrito de la siguiente manera:

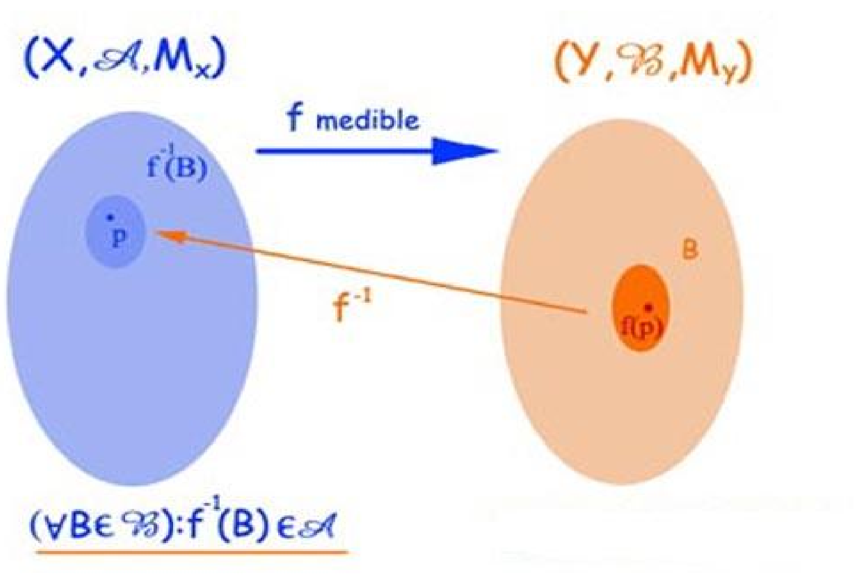


Figura B.1: Función medible

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1; \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2; \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m.
\end{array}
$$

en donde $a_{ij} \in F$ (con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$; $m, n \in \mathbb{N}^+$) y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas.

Es posible reescribir el sistema lineal de ecuaciones anterior en forma matricial, de la siguiente manera:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{pmatrix}
$$

y en notación, podemos escribir las ultimas ecuaciones como $AX = b$. Si el vector $b = 0$, se dice que el sistema lineal de ecuaciones es `homogéneo`.

Teorema B.6 (Solución de una ecuación homogénea) *Si A es una matriz $m \times n$, con $m < n$, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene una solución no trivial.*

Este teorema nos garantiza que si el número de filas no nulas de A es menor que el número de columnas, entonces el sistema de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene solución no trivial, es decir, una solución $X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$ en la cual no todo $x_j = 0$; para $1 \leq j \leq n$, con $n \in \mathbb{N}^+$.
La demostración de este resultado se encuentra en [8].

Bibliografía

[1] Andreas Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, Contemporary Mathematics, volume 31, páginas $31 - 33$, American Mathematical Society, 1984.

[2] Nicolas Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1976.

[3] Nicolas Bourbaki, *Elements of Mathematics Algebra I*, Addison-Wesley, París, 1974.

[4] Pierre A. Grillet, *Abstract Algebra*, Springer, New York, Second Edition 2007.

[5] Paul R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer, New York, 1958.

[6] J. D Halpern, *Bases for vector spaces and the axiom of choice*, Proceedings of the American Mathematical Society 17, páginas $670 - 673$, 1966.

[7] Israel N. Herstein, *Topics in Algebra*, Blaisdell, New York, 1964.

[8] Kenneth Hoffman, Ray Kunze, *Linear Algebra*, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1971.

[9] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[10] Thomas W. Hungerford, *An introduction abstract algebra*, Saunders College Publishing, 1st edición 1990.

[11] Nathan Jacobson, *Lectures in abstract algebra* (Vol. I, II, III), Springer-Verlag, New York, 1910.

[12] Thomas J. Jech, *Set Theory*, Academic Press, New York, 1978.

[13] Thomas J. Jech, Karel Hrbacek, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, New York, theird edition 1999.

[14] Israel Kleiner, *A History of Abstract Algebra*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[15] Andréi Kolmogórov, Sergei Fomin, *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Segunda edición, Mir, Moscu, 1975.

[16] Serge Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[17] Richar Marcano, *Aspectos básicos de la lógica matemática y la teoría de conjuntos*, Universidad de Carabobo, Departamento de Matemática, Carabobo, Venezuela, 2010.

[18] Yiannis Moschovakis, *Notes on Set Theory*, Springer Science+Business Media, New York, Second Edition 2006.

[19] C. W. Norman, *Undergraduate Algebra: a first course*, Oxford University Press, New York, 1986.

[20] Juan Ojeda, *Introducción al Álgebra Moderna*, Universidad de Carabobo, Departamento de Matemática, Carabobo, Venezuela, 2009-2010.

[21] Steven Roman, *Advanced Linear Algebra*, Springer Science+Business Media, New York, theird edition 2008.

[22] Robert Vaught, *Set Theory: an introduction*, Birkhäuser, Boston, Second Edition 1995.

[23] Van der Waerden, *Algebra* (Vol. I, II), Springer-Verlag, New York, 1991.